République Tunisienne

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2020

الجمهورية التونسية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2020

Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques

Session 2020	**Date : 16/07/2020**	**Heure : 8H**	**Durée : 4 heures**

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice (5 points)

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète, qui prend ses valeurs dans $\{x_n\ , n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$. On pose $p_n = P(X = x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n e^{-t x_n}$ est convergente.

   (b) En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, la variable aléatoire e^{-tX} est d'espérance finie, et que son espérance $E(e^{-tX}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-t x_n}$.

   Dans la suite, on notera pour tout $t \geqslant 0$, $\Phi_X(t) = E(e^{-tX}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-t x_n}$.

2. Montrer que Φ_X est à valeurs dans $[0,1]$, et qu'elle est continue sur $[0, +\infty[$.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver que pour tout $\lambda > 0$, et pour tout $x \geqslant 0$:

$$0 \leqslant x^k e^{-\lambda x} \leqslant \frac{k^k}{\lambda^k} e^{-k}.$$

   (b) En déduire que Φ_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et donner l'expression de ses dérivées successives.

4. Soient a et b deux réels positifs. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $\Phi_{aX+b}(t) = e^{-bt}\Phi_X(at)$.

5. On considère une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et on suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que l'on a $\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$.

6. On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer l'ensemble des réels t tels que e^{-tX} soit d'espérance finie, et donner l'expression de $E(e^{-tX})$.

7. (a) On suppose que X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   Déterminer l'ensemble des réels t tels que e^{-tX} soit d'espérance finie, et donner l'expression de $E(e^{-tX})$.

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   Justifier que S_n suit une loi de Poisson à préciser, et montrer que pour tout $a > 0$:
   $P(S_n \leqslant na) \leqslant e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}$ si $t \geqslant 0$, et $P(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}$ si $t \leqslant 0$.

Problème 1 (6 points)

Notations. On désigne par :
$\mathbb{B}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications continues et bornées sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles.
$\mathbb{E}$ l'ensemble des applications f continues sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, et telles que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$.

I Généralités

1. Vérifier que $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et que $\mathbb{B} \subset \mathbb{E}$.
2. Soit $g : t \mapsto \sqrt{t}\sin(t)$.
   (a) Montrer que g n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$.
   (b) Prouver que $g \in \mathbb{E}$. Que peut-on conclure ?
3. Soit $f \in \mathbb{E}$.

   Montrer que, pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Dans toute la suite, et pour tout $f \in \mathbb{E}$, on notera $\widetilde{f}$ l'application définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \in]-1,+\infty[,\ \ \widetilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2+x}\,dt.$$

4. Vérifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathbb{E}$, $\widetilde{\lambda f+g} = \lambda\widetilde{f}+\widetilde{g}$.

II Propriétés de $\widetilde{f}$

Soit $f \in \mathbb{E}$.

1. Montrer que la fonction $\widetilde{f}$ est dérivable à tout ordre $p \in \mathbb{N}^*$ sur $]-1,+\infty[$ et exprimer sa dérivée d'ordre p, $\left(\widetilde{f}\right)^{(p)}$, en tout $x > -1$, à l'aide de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}}\,dt$.
2. (a) Soit $(x_n)_n$ une suite de réels dans $]-1,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \widetilde{f}(x_n) = 0$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \widetilde{f}(x) = 0$.
3. On suppose que ψ est une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt \neq 0$.

   Montrer que $\psi \in \mathbb{E}$ et que $\displaystyle\widetilde{\psi}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \psi(t)\,dt$.
4. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle I_k = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)^{k+1}}\,dt$.
   (a) Vérifier que pour tout réel x dans $]-1,1[$ et pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\frac{f(t)}{1+t^2+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k f(t)\,x^k}{(1+t^2)^{k+1}}.$$

   (b) Montrer alors que pour tout réel x dans $]-1,1[$, on a : $\displaystyle\widetilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_k\, x^k$.

(c) L'application $f \mapsto \widetilde{f}$ est-elle surjective de $\mathbb{E}$ sur $\mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[,\mathbb{R})$? Justifier.

Problème 2 (9 points)

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n qu'on munit de la norme $\|\cdot\|$ définie pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{Tr}({}^tAA)},$$

où ${}^tA$ est la matrice transposée de A et Tr est l'application trace. Pour toute famille $\{a_1,\ldots,a_n\}$ de réels, $\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont respectivement $a_1,\ldots,a_n$.
On rappelle que le groupe spécial orthogonal $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } {}^tAA = I_n \text{ et } \det(A) = 1.$$

On note G l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = 1$.

L'objectif de ce problème est de montrer que les matrices de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices de G ayant une norme minimale, c'est-à-dire

$$A \in G \text{ telle que } \forall M \in G,\ \|A\| \leqslant \|M\| \iff A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

I Existence d'une matrice de G de norme minimale

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

2. (a) Justifier la continuité de la fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$.
   (b) En déduire que l'ensemble G est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_p = \operatorname{diag}(p,\frac{1}{p},1,\ldots,1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $n \geqslant 3$ et $A_p = \operatorname{diag}(p,\frac{1}{p})$ si $n = 2$.
   (a) Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p \in G$ et calculer $\|A_p\|$.
   (b) L'ensemble G est-il borné ? Justifier la réponse.
4. On choisit une matrice quelconque $M \in G$ et on note $r = \|M\|$.
   (a) Justifier que $r \neq 0$.
   (b) Justifier que l'application $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \|A\|$ est continue.
   (c) $B_f(0_n,r)$ désigne la boule fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de centre la matrice nulle 0_n et de rayon r. Montrer que l'ensemble $K = G \cap B_f(0_n,r)$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) En déduire que $\inf_{A\in G} \|A\|$ est atteint dans K.

II Cas particulier où $n = 2$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par

$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A).$$

2. Calculer $\|A\|$ pour $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
3. On considère un réel positif r tel que l'ensemble $K_r = \left\{A \in G,\ \|A\| = r\right\}$ est non vide. Soit $A \in K_r$.
   (a) Déterminer en fonction de r le polynôme caractéristique $\chi_{{}^tAA}$ de la matrice ${}^tAA$.
   (b) La matrice ${}^tAA$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.
   En déduire que $r \geqslant \sqrt{2}$.
4. Démontrer que l'ensemble $K_{\sqrt{2}}$ est égal à $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

III Cas général où $n \geqslant 2$

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y\rangle = {}^tXY.$$

Soit $A \in G$.

1. (a) Justifier l'existence d'une famille de réels $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et d'une base orthonormale $(V_1, \ldots, V_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad {}^tAAV_i = \lambda_i V_i.$$

   (b) Montrer que $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

   Dans la suite, on note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ et $U_i = \dfrac{1}{\sigma_i}AV_i$.
2. (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a ${}^tAU_i = \sigma_i V_i$.
   (b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un vecteur propre de la matrice $A\,{}^tA$ et préciser la valeur propre associée.
   (c) Montrer que la famille $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. On définit les matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la i-ème colonne est U_i et V_i respectivement et soit la matrice $\Sigma = {}^tUAV$.
   (a) Justifier que U et V sont deux matrices orthogonales.
   (b) Montrer que $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.
   (c) En déduire que $\|A\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ et que $\det(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sigma_i$.
   (d) On admet que

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \text{ telle que } \sigma_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } \prod_{i=1}^{n}\sigma_i = 1\right\}$$

   est atteint pour $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 1$.
   Montrer que si $A \in G$ de norme minimale alors $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Démontrer la réciproque.

Fin de l'énoncé