

Correction Concours PC (Physique) 2020

Problème 1 (sur 50 points)

I. Onde électromagnétique dans une cavité vide à une dimension

1. $\text{div} \vec{E} = 0$; $\text{div} \vec{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	1 (4x0,25)
$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$; $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$	1
2. $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E(x,z)}{\partial x} = 0 \Rightarrow E(x,z) = E(z)$. Solutions de type onde stationnaire.	1
3. $\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E(z) = 0$	1
4. $E(z) = A \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$ $E(z=0) = 0 \Rightarrow A = 0$. En posant $B = E_0$, alors : $E(z) = E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$. $E(z=L) = 0 \Rightarrow E_0 \sin\left(\frac{\omega}{c} L\right) = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L} = n\omega_1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) avec $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$: pulsation du mode fondamental. La cavité permet de sélectionner des fréquences particulières (les modes).	1 0,5
5. $\vec{E}_n(z,t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L} z\right) e^{j\omega_n t} \vec{u}_x$ $\vec{E}_n(z,t) = \underbrace{\frac{E_0}{2j} e^{j(\omega_n t + \frac{n\pi}{L} z)}}_{\text{OPPH réfléchiée}} - \underbrace{\frac{E_0}{2j} e^{j(\omega_n t - \frac{n\pi}{L} z)}}_{\text{OPPH incidente}}$ $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_n = -\frac{\partial \vec{B}_n}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}_n(z,t) = j \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{n\pi}{L} z\right) e^{j\omega_n t} \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{n\pi}{L} z\right) e^{j(\omega_n t + \frac{\pi}{2})} \vec{u}_y$	0,5 1 1
6. $v_n = n \frac{c}{2L} \Rightarrow \Delta v = v_{n+1} - v_n = \frac{c}{2L} \Rightarrow \Delta v = 0,5 \text{ GHz}$	1
7. $\langle u \rangle = \langle \epsilon_0 \frac{E_n^2}{2} + \frac{B_n^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \Rightarrow W = \langle u \rangle S L = \frac{\epsilon_0}{4} S L E_0^2$	1+0,5
8.a Les ondes sont amorties.	0,5
b. $W_{\text{perdue}} = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{E_0}{2}\right)^2 c S (1-R) T$	1
c. $Q = 4\pi \frac{L}{c(1-R)T} = 4\pi \frac{L}{\lambda(1-R)}$	1
d. $\Delta v_c = \frac{v}{Q} = \frac{c(1-R)}{4\pi L} = 7,96 \times 10^5 \text{ Hz} \approx 0,8 \text{ MHz}$	1

II. Propagation dans un milieu amplificateur

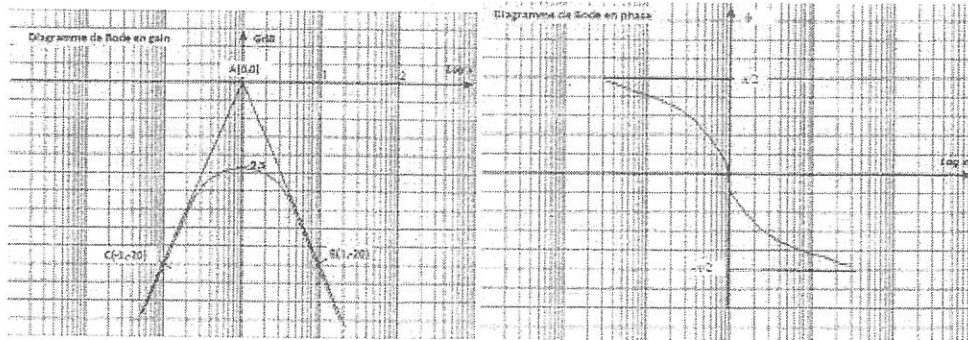
1. $\text{div} \vec{E} = 0$; $\text{div} \vec{B} = 0$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	1
2. $\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$	1
3. $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r$	1
4. $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} \left(1 - j \frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'}\right)^{1/2} \xrightarrow{\text{Développement Limité}} k \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} \left(1 - \frac{j \epsilon_r''}{2 \epsilon_r'}\right) \Rightarrow k \approx \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\epsilon_r'} - j \frac{\epsilon_r''}{2}\right)$	1
5. $\vec{E}(z,t) = \text{Réel}(\vec{E}(z,t)) = E_0 e^{-\frac{\epsilon_r'' \omega}{2c} z} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} z\right) \vec{u}_x$ $\vec{B} = \frac{k \vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow \vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} e^{-\frac{\epsilon_r'' \omega}{2c} z} \left[\sqrt{\epsilon_r'} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} z\right) + \frac{\epsilon_r''}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} z\right) \right] \vec{u}_y$	1 1
6. $\vec{\pi}(z,t) = \frac{\vec{E}(z,t) \wedge \vec{B}(z,t)}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sqrt{\epsilon_r'} e^{-\frac{\epsilon_r'' \omega}{c} z} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} z\right) \vec{u}_z + \frac{E_0^2 \epsilon_r''}{\mu_0 c 2} e^{-\frac{\epsilon_r'' \omega}{c} z} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} z\right) \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r'} z\right) \vec{u}_z$ $I(z) = \ \langle \vec{\pi} \rangle\ = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 e^{-\frac{\epsilon_r'' \omega}{c} z} \sqrt{\epsilon_r'}$	1 1

Si $\varepsilon_r'' > 0 \Rightarrow I(z)$ est atténuée. Si $\varepsilon_r'' < 0 \Rightarrow I(z)$ est amplifiée.	1 (2x0.5)
7. Absorption, émission spontanée et émission induite (ou stimulée). L'émission induite se produit lorsque la désexcitation d'un atome depuis le niveau 2 vers le niveau 1 est engendrée par un photon incident d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$. Le photon émis dans ce processus admet les mêmes caractéristiques que le photon incident : même phase, direction et polarisation. L'émission stimulée est le processus prépondérant dans un Laser.	2 (4x0.5)
8. On a amplification si $\varepsilon_r'' < 0 \Rightarrow \Delta N = N_2 - N_1 > 0$ donc $N_2 > N_1$: c'est l'inversion de population.	1.5
9.a On a $I(z) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 e^{-\frac{\varepsilon_r'' \omega}{c} z} \Rightarrow I(0) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$ et $I'(0) = I(0) R e^{-\frac{\varepsilon_r'' \omega}{c} 2L} \Rightarrow \frac{I'(0)}{I(0)} = R \exp\left(-\varepsilon_r'' \frac{\omega}{c} 2L\right)$	1.5
9.b Pour que l'onde puisse se former sans amortissement (condition d'accrochage des oscillations) il faut que : $R \exp\left(-\varepsilon_r'' \frac{\omega}{c} 2L\right) \geq 1 \Rightarrow \Delta N \geq \frac{-c}{2L\alpha\omega} \ln R \Rightarrow (\Delta N)_{min} = \frac{c}{2L\alpha\omega} \ln \frac{1}{R}$	1.5
9.c $\omega_0 - \Gamma \leq \frac{n\pi c}{L} \leq \omega_0 + \Gamma \Rightarrow \frac{L}{\pi c} (\omega_0 - \Gamma) \leq n \leq \frac{L}{\pi c} (\omega_0 + \Gamma) \Rightarrow 954926,79 \leq n \leq 954932,52$: 6 modes d'ondes stationnaires non amorties peuvent donc s'établir.	1 0.5

III. Analogie électronique : oscillateur à filtre de Wien

1. $G = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$	1
2. $V_0 = \frac{V_{sat}}{G}$ Graphes V_s en fonction de V_e :	1 +1 (fig)
3. Par un diviseur de tension, on trouve que : $\underline{H} = \frac{V_s'}{V_e'} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}$ Par identification $H_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.	1.5 +0,5 +0,5
4. $G^{max} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_{dB}^{max} = -20 \log_{10} 3 = -9,54 \text{ dB}$ $\varphi(\omega = \omega_0) = 0$	0,5 +0,5

5.



C'est un filtre passe-bande.

1
+1

0,5

6. On a : $\underline{V}_e = \underline{V}_s' = \underline{H}\underline{V}_e' = \underline{H}\underline{V}_s = \underline{H}\underline{G}\underline{V}_e \Rightarrow \underline{H}\underline{G} = 1$ Alors, $\underline{H}$ est réelle. Ceci est réalisable si : $\omega = \omega_0$, soit $\underline{H} = H_0 = \frac{1}{3}$ et $G = 3 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{R_2}{R_1} = 2 \\ f = \frac{1}{2\pi RC} \end{cases}$

1

1

7.a $\underline{V}_s' = \underline{H}\underline{V}_e' = \frac{1}{3+j(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}\underline{V}_e' \Rightarrow 3\underline{V}_s' + j\frac{\omega}{\omega_0}\underline{V}_s' + \frac{\omega_0}{j\omega}\underline{V}_s' = \underline{V}_e' \Rightarrow \frac{d^2V_s'}{dt^2} + 3\omega_0\frac{dV_s'}{dt} + \omega_0^2V_s' = \omega_0\frac{dV_e'}{dt}$

2

7.b Or $\underline{V}_e' = \underline{G}\underline{V}_e = \underline{G}\underline{V}_s' \Rightarrow \frac{d^2V_s'}{dt^2} + (3-G)\omega_0\frac{dV_s'}{dt} + \omega_0^2V_s' = 0$

1

8. Pour obtenir des oscillations harmoniques il faut que : $G = 3 \Rightarrow r = \frac{R_2}{R_1} = 2$.

1

La fréquence des oscillations : $f = \frac{1}{2\pi RC} = 3315,7 \text{ Hz} \approx 3,3 \text{ kHz}$

1

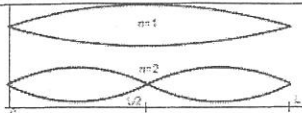
9. Les fluctuations ne seront amplifiées que si $G > 3 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} > 2$. L'amplification va conduire à la saturation de la tension de sortie de l'AO. La tension ainsi saturée se décompose en série de Fourier et seul le fondamental de pulsation ω_0 peut satisfaire à la condition d'oscillation. Les non-linéarités de l'AO vont limiter les amplitudes des oscillations et vont permettre un fonctionnement stable de l'oscillateur.

1

1

Problème 2 (sur 50 points)

I- Portance d'une passerelle	
I-1. Ecoulement irrotationnel $\Rightarrow \overrightarrow{rot} \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{grad} \varphi$	1
I-2. Ecoulement incompressible $\Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \text{div} \overrightarrow{grad} \varphi = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0$	1
I-3. $\vec{v}(r = \infty) = \vec{v}_0$ et $\vec{v}(r = R, \theta) \cdot \vec{u}_r = 0$	1
I-4-a. $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \varphi = \begin{cases} v_r = \left(v_0 - \frac{k}{2\pi r^2}\right) \cos \theta \\ v_\theta = -\left(v_0 + \frac{k}{2\pi r^2}\right) \sin \theta \end{cases}$	1,5
I-4-b. $v_r(r = R, \theta) = 0 \Rightarrow k = 2\pi R^2 v_0$	1
I-4-c. Les points d'arrêt : $(r = R, \theta = 0)$ et $(r = R, \theta = \pi)$	1
I-5. Bernoulli : $\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{P(R, \theta)}{\rho} + \frac{v^2(R, \theta)}{2} \Rightarrow P(R, \theta) = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta)$	2
I-6. On a $P(R, \pi - \theta) = P(R, \theta)$, alors les forces de pression sont symétriques par rapport au plan (yOz) $\Rightarrow F_x = \vec{F}_p \cdot \vec{u}_x = 0$. De même on a $P(R, -\theta) = P(R, \theta)$, alors les forces de pression sont symétriques par rapport au plan (xOz) $\Rightarrow F_y = \vec{F}_p \cdot \vec{u}_y = 0 \Rightarrow$ pas de portance. Fluide non visqueux $\Rightarrow$ pas de traînée.	0,5 0,5 0,5 0,5
I-7. $\vec{v} = \overrightarrow{grad} \varphi = \begin{cases} v_r = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta \\ v_\theta = -v_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{R^2 \Omega}{r} \end{cases}$	1,5
I-8. $v_\theta(r = R, \theta) = 0 \Rightarrow \sin \theta = \frac{R\Omega}{2v_0} \Rightarrow \Omega = \frac{2v_0}{R} \sin \theta = \frac{v_0}{R}$	1
I-9. Bernoulli : $\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{P(R, \theta)}{\rho} + \frac{v^2(R, \theta)}{2}$ $\Rightarrow P(R, \theta) = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta) - \rho \frac{R^2 \Omega^2}{2} + 2\rho v_0 R \Omega \sin \theta$	2
I-10. On a $P(R, \pi - \theta) = P(R, \theta) \Rightarrow F_x = \vec{F}_p \cdot \vec{u}_x = 0$ En revanche, $P(R, -\theta) \neq P(R, \theta) \Rightarrow F_y = \vec{F}_p \cdot \vec{u}_y \neq 0$	0,5 0,5
I-11. $\vec{F}_p = F_y \vec{u}_y = \iint_{\text{surface}} -P(R, \theta) R \sin \theta d\theta dz \vec{u}_y \Rightarrow \vec{F}_p = -2\pi \rho v_0 R^2 \Omega L \vec{u}_y$	1,5
I-12. $\vec{F}_p = \Gamma \vec{v}_0 \wedge \vec{\Omega}$, avec $\Gamma = 2\pi \rho R^2 L$	1
I-13. Si la rotation est horaire $\Rightarrow \Omega < 0 \Rightarrow F_p > 0 \Rightarrow$ portance	1
I-14. $\ \vec{F}_p\ = 128650 \text{ N}$	1
I-15. $Re = \frac{\rho v (2R)}{\eta} = 2,1 \cdot 10^6 \Rightarrow$ l'écoulement est turbulent en aval du cylindre $\Rightarrow$ dissymétrie des forces de pression par rapport à (yoz) $\Rightarrow F_x \neq 0 \Rightarrow$ force de traînée	0,5 0,5 0,5
II- Vibration transversale	
II-1. RFD : $\mu dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}(z + dz) - \vec{T}(z)$ Sur Oz : $0 = \frac{\partial(T \cos \alpha)}{\partial z} \approx \frac{\partial T}{\partial z} \Rightarrow T$ est indépendante de z , et par condition aux limites $T = T_0$ Sur Oy : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial(T \sin \alpha)}{\partial z} \approx T_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$; avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$	1 0,5 1 0,5
II-2. La solution générale : $y(z, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{z}{c}\right)$ avec c la célérité de l'onde.	1
II-3. L'onde est transversale car le déplacement de la corde est perpendiculaire à la direction de propagation (Oz). L'onde acoustique est un exemple d'onde longitudinale.	0,5 0,5
II-4-a. Mode propre est une solution sinusoïdale satisfaisant aux conditions aux limites.	1
II-4-b. $k = \frac{\omega}{c}$	1

II-4-c. $y(0, t) = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} [\pi]$ $y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k = k_n = n \frac{\pi}{L} \Rightarrow \omega = \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \Rightarrow f_n = n \frac{c}{2L}$	0,5 1
II-4-d. - Nœuds : $y(z, t) = 0 \Rightarrow \sin(k_n z) = 0 \Rightarrow z = z_p = p \frac{\pi}{k_n} \Rightarrow \Delta z = \frac{\pi}{k_n} = \frac{L}{n}$ - Ventres : $\sin(k_n z) = \pm 1 \Rightarrow z = z_p = p \frac{\pi}{k_n} + \frac{\pi}{2k_n} \Rightarrow \Delta z = \frac{\pi}{k_n} = \frac{L}{n}$ - Entre un nœud et un ventre : $\Delta z = \frac{\pi}{2k_n} = \frac{L}{2n}$	0,5 0,5 0,5
II-4-e. 	0,5 0,5
II-5-a. $\langle \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \rangle = \frac{1}{4} \mu y_0^2 \omega^2 \sin^2(kz) = \frac{1}{4} \mu y_0^2 c^2 k^2 \sin^2(kz) = \frac{1}{4} T_0 y_0^2 k^2 \sin^2(kz)$; $\langle \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \rangle = \frac{1}{4} T_0 y_0^2 k^2 \cos^2(kz)$; soit : $\langle e \rangle = \frac{1}{4} T_0 y_0^2 k^2 = \frac{\pi^2}{4L^2} T_0 y_0^2$	1,5
II-5-b. L'énergie totale : $\mathcal{E} = \int_0^L \langle e \rangle dz = \frac{\pi^2}{4L} T_0 y_0^2$	1,5
II-6. $[E] = \frac{[F]}{\frac{R^4 \partial^3 y}{4 \partial z^3}} = ML^{-1} T^{-2} = [\text{Pression}]$; E s'exprime en Pascal (Pa)	0,5 0,5
II-7. RFD : $\mu dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{F}(z + dz) - \vec{F}(z) = \frac{\partial \vec{F}(z)}{\partial z} dz = \frac{\partial \vec{T}(z)}{\partial z} dz = E \frac{\pi R^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} \vec{u}_y dz$ Projection sur Oy : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial(T \sin \alpha)}{\partial z} - E \frac{\pi R^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - E \frac{\pi R^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}$	1 1
II-8. Relation de dispersion : $\mu \omega^2 = T_0 k^2 + \frac{E \pi R^4}{4} k^4 \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2 \left(1 + \frac{E \pi R^4}{4 T_0} k^2 \right)$	1,5
II-9. $y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k = k_n = n \frac{\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \sqrt{1 + \beta n^2}$; avec $\beta = \frac{\pi^3 E R^4}{4 T_0 L^2}$. Les harmoniques élevées sont plus perturbées.	1 1 0,5
II-10. Pour $T_0 = 0$, la relation de dispersion devient : $\omega^2 = \frac{E \pi R^4}{4 \mu} k^4$ où $\mu = \rho_s S = \rho_s \pi R^2$ Or, $k = k_n = n \frac{\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E R^2}{4 \rho_s}}$. A.N : $\omega_1 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{E R^2}{4 \rho_s}} = 5 \text{ rad.s}^{-1}$	1 1

III- Vibration longitudinale	
III-1. RFD : $\rho_s S dz \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{u}_z = \vec{F}(z + dz) - \vec{F}(z) = \frac{\partial \vec{F}(z)}{\partial z} dz = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} dz \vec{u}_z$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$; avec $v = \sqrt{\frac{E}{\rho_s}}$	1,5 0,5
III-2. Conditions aux limites : $\xi(z = 0, t) = 0$ et $\frac{\partial \xi}{\partial z}(z = L, t) = 0$	0,5 0,5
III-3. $\xi(0, t) = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} [\pi]$ $\frac{\partial \xi}{\partial z}(L, t) = 0 \Rightarrow \cos kL = 0 \Rightarrow kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{N}^*$ $\omega_n = v k_n = \frac{v \pi}{L} \left(n - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow f_n = \frac{v}{2L} \left(n - \frac{1}{2} \right)$; avec $n \in \mathbb{N}^*$; $f_1 = 18 \text{ Hz}$	0,5 0,5 0,5 0,5