



Concours Physique et Chimie & Technologie Epreuve de Mathématiques

Session 2023	Date : 31/05/2023	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

L'usage d'une calculatrice **non programmable** est autorisé. L'usage de tout autre dispositif électronique est interdit.

Notations

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- tA la matrice transposée de A et $\det(A)$ le déterminant de A .
- $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique défini par : $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ où $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ sont les composantes de x et y respectivement. On note aussi $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Problème I

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des vecteurs de E , on appelle **matrice de Gram** de la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée **Gram** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et définie par

$$\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

c'est-à-dire :

$$\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

On notera $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son déterminant.

Partie A : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire canonique et notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère les vecteurs :

$$x_1 = (2, -2, -1), \quad x_2 = (-1, 1, -2) \quad \text{et} \quad x_3 = (1, 1, 2).$$

Q.1 ▷ Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q.2 ▷ Soit $M = \text{Gram}(x_1, x_2, x_3)$, vérifier que :

$$M = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Q.3 ▷ Sans faire de calculs, prouver que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

▼ Q.4 ▷ Montrer que le polynôme caractéristique de M est :

$$P_M(X) = X^3 - 21X^2 + 120X - 100.$$

Q.5 ▷ Déterminer alors $\det(M)$. Que peut-on dire de la matrice M ?

Q.6 ▷ Montrer que $\text{Spec}(M) = \{1, 10\}$.

▼ Soient E_1 et E_{10} les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 10 respectivement.

Q.7 ▷ Montrer que $E_{10} = \text{Vect}((2, -2, 1), (2, 1, -2))$ et que ces deux vecteurs forment une base orthogonale de E_{10} .

Q.8 ▷ Montrer que $E_1 = \text{Vect}((1, 2, 2))$.

Q.9 ▷ Déterminer une matrice orthogonale P telle que $M = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(1, 10, 10)$ la matrice diagonale formée par les valeurs propres de M .

▼ Soit $x = (1, 1, 0)$ et soient y et z ses projetés orthogonaux sur E_1 et E_{10} respectivement.

Q.10 ▷ Montrer que $y = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ puis déduire z .

Q.11 ▷ Calculer la distance de x à E_1 puis à E_{10} .

Partie B : Etude du cas général

Q.12 ▷ Montrer que si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

▼ On suppose que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre. Notons $F = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F . Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q.13 ▷ Montrer que $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Q.14 ▷ En déduire que $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^tAA$.

Q.15 ▷ Déduire que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

Q.16 ▷ Vérifier que $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et déduire que toutes les valeurs propres de $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont réelles et non nulles.

Q.17 ▷ Vérifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$${}^tX \cdot \text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot X = \|AX\|_2^2$$

et déduire que les valeurs propres de $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont strictement positives.

Q.18 ▷ En déduire que pour tout $\lambda \in \text{Spec}(\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n))$, on a $\lambda < \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

▼ On conserve les mêmes hypothèses et notations que celles données juste après la question Q.12. Soient $x \in E$ et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F .

Q.19 ▷ Justifier que $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$.

Q.20 ▷ Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x))$.

Q.21 ▷ Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|^2 \cdot G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ puis que

$$d(x, F) = \left(\frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $d(x, F)$ désigne la distance de x au sous-espace F .

Q.22 ▷ Montrer alors par récurrence que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$ avec égalité si, et seulement si, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale.

▼ Application : Matrices de Hilbert

On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $n \geq 1$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à $n - 1$ et on le munit du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt \quad \forall P, Q \in E.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $P_i(X) = X^{i-1}$.

Q.23 ▷ Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Q.24 ▷ Calculer $\langle P_i, P_j \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Q.25 ▷ On appelle matrice de Hilbert d'ordre $n \geq 1$, la matrice $H_n = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Déduire que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

Problème II

Partie A

Q.26 ▷ Soit ζ la fonction définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que ζ est continue, décroissante sur $]1, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

▼ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

Q.27 ▷ Justifier que I_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Q.28 ▷ Ecrire I_{p+1} en fonction de I_p et déduire une expression simple de I_p .

Q.29 ▷ En déduire que pour tout réel $a > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\int_0^{+\infty} t^p e^{-at} dt = \frac{p!}{a^{p+1}}$.

Q.30 ▷ Vérifier que pour tout réel $t > 0$ on a : $\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ et en utilisant le **théorème d'intégration terme à terme** déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} dt = p! \zeta(p+1).$$

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$.

Q.31 ▷ Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.

Q.32 ▷ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. (On rappelle que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

▼ Q.33 ▷ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on a

$$\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!(e^t - 1)}.$$

Q.34 ▷ En utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**, déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1}$$

et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

▼ Q.35 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-nt} dt = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Q.36 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Partie C

Q.37 ▷ En intégrant par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt = (-1)^n \frac{x \operatorname{sh}(\pi x)}{n^2 + x^2}.$$

Q.38 ▷ Montrer que $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$ pour tout $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Q.39 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x \operatorname{sh}(\pi x)}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sh}(\pi x)}{2x} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt.$$

Q.40 ▷ Montrer que la fonction $\psi : t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, puis déduire à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0.$$

Q.41 ▷ Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}$.

Q.42 ▷ En utilisant la question Q.36, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x).$$

▼ On pose $\phi(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $\phi(0) = 0$.

Q.43 ▷ Vérifier que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}.$$

Q.44 ▷ Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)$.

Q.45 ▷ établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \phi(x)$.

Partie D

Q.46 ▷ En utilisant l'expression de f    l'aide de ϕ , vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$(f(x))^2 + \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Q.47 ▷ En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$(f(x))^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2}\zeta(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(n + \frac{3}{2}\right) \zeta(2n+2) x^{2n}.$$

Q.48 ▷ En utilisant le **produit de Cauchy**, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \zeta(2k+2) \zeta(2n-2k) \right) x^{2n}.$$

Q.49 ▷ Déduire que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2n) = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k) \zeta(2n-2k).$$

Q.50 ▷ Vérifier que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

★ Fin de l'épreuve ★



Concours Physique et Chimie & Technologie
Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques

Session 2023	Date : 31/05/2023	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Notations

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- tA la matrice transposée de A et $\det(A)$ le déterminant de A .
- $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique défini par : $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ où $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ sont les composantes de x et y respectivement. On note aussi $\| \cdot \|_2$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Problème I

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des vecteurs de E , on appelle **matrice de Gram** de la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et définie par

$$\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

c'est-à-dire :

$$\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix}.$$

On notera $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son déterminant.

Partie A : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère $E = \mathbb{R}^3$ que l'on munit du produit scalaire canonique et notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère les vecteurs :

$$x_1 = (2, -2, -1), \quad x_2 = (-1, 1, -2) \quad \text{et} \quad x_3 = (1, 1, 2).$$

Q.1 ▷ Montrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et

1/2: libre ou calcul du det et 1/2 pour dim

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 2 = 10 \neq 0$$

et par suite (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q.2 ▷ Soit $M = \text{Gram}(x_1, x_2, x_3)$, vérifier que :

$$M = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_1 \rangle &= 2^2 + (-2)^2 + (-1)^2 = 9, & \langle x_1, x_2 \rangle &= \langle x_2, x_1 \rangle = -2 - 2 + 2 = -2, \\ \langle x_1, x_3 \rangle &= \langle x_3, x_1 \rangle = 2 - 2 - 2 = -2, & \langle x_2, x_2 \rangle &= (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 6, \\ \langle x_2, x_3 \rangle &= \langle x_3, x_2 \rangle = -1 + 1 - 4 = -4, & \langle x_3, x_3 \rangle &= 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad 1$$

Q.3 ▷ Sans faire de calculs, prouver que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Il est clair que M est une matrice symétrique réelle, donc d'après le **théorème spectral**, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. 1

▼ Q.4 ▷ Montrer que le polynôme caractéristique de M est :

$$P_M(X) = X^3 - 21X^2 + 120X - 100.$$

On a

$$\begin{aligned} P_M(X) &= \det(XI_3 - M) = \begin{vmatrix} X-9 & 2 & 2 \\ 2 & X-6 & 4 \\ 2 & 4 & X-6 \end{vmatrix} \\ &= (X-9) \begin{vmatrix} X-6 & 4 \\ 4 & X-6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & X-6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ X-6 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (X-9) [X^2 - 12X + 20] - 2[2X - 20] + 2[20 - 2X] \\ &= [X^3 - 12X^2 + 20X - 9X^2 + 108X - 180] + 80 - 8X \\ &= X^3 - 21X^2 + 120X - 100 \quad (1) \end{aligned}$$

Q.5 ▷ Déterminer alors $\det(M)$. Que peut-on dire de la matrice M ?

$$P_M(0) = -\det(M), \text{ donc } \det(M) = 100 \neq 0 \text{ et par suite } M \text{ est inversible.} \quad (1/2) \quad (1)$$

Q.6 ▷ Montrer que $\text{Spec}(M) = \{1, 10\}$.

$$\text{On a } X^3 - 21X^2 + 120X - 100 = (X-1)(X^2 - 20X + 100) = (X-1)(X-10)^2, \text{ d'où } \text{Spec}(M) = \{1, 10\}. \quad (1)$$

▼ Soient E_1 et E_{10} les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 10 respectivement.

Q.7 ▷ Montrer que $E_{10} = \text{Vect}((2, -2, 1), (2, 1, -2))$ et que ces deux vecteurs forment une base orthogonale de E_{10} .

On a

$$MX = 10X \iff \begin{cases} 9x - 2y - 2z = 10x \\ -2x + 6y - 4z = 10y \\ -2x - 4y + 6z = 10z \end{cases} \iff \begin{cases} -x - 2y - 2z = 0 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \\ -2x - 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

Donc $MX = 10X \iff x + 2y + 2z = 0$. Ainsi E_{10} est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il est clair que $(2, -2, 1)$ et $(2, 1, -2)$ appartiennent à E_{10} , de plus ils ne sont pas colinéaires et donc ils forment une base de E_{10} . D'autre part, on a $\langle (2, -2, 1), (2, 1, -2) \rangle = 4 - 2 - 2 = 0$ et donc $(2, -2, 1)$ et $(2, 1, -2)$ forment une base orthogonale de E_{10} .

Deuxième méthode : On a

$$M \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 1/4$$

$$M \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1/4$$

Ainsi $(2, -2, 1)$ et $(2, 1, -2)$ appartiennent à E_{10} , de plus ils ne sont pas colinéaires et donc ils forment une famille libre de E_{10} et comme $\dim(E_{10}) = 2$ car M est diagonalisable, alors ils forment une base de E_{10} or ces vecteurs sont orthogonaux et par conséquent $(2, -2, 1)$ et $(2, 1, -2)$ forment une base orthogonale de E_{10} . 1/4

Q.8 ▷ Montrer que $E_1 = \text{Vect}((1, 2, 2))$.

On a

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $(1, 2, 2)$ appartient à E_1 et comme $\dim(E_1) = 1$ car M est diagonalisable, alors $E_1 = \text{Vect}((1, 2, 2))$. (1)

Q.9 ▷ Déterminer une matrice orthogonale P telle que $M = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(1, 10, 10)$ la matrice diagonale formée par les valeurs propres de M .

Le théorème spectral assure bien l'existence d'une telle matrice orthogonale P .

Posons $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (2, -2, 1)$ et $v_3 = (2, 1, -2)$, la famille (v_1, v_2, v_3) est une base orthogonale de vecteurs propres et donc $(\frac{v_1}{\|v_1\|_2}, \frac{v_2}{\|v_2\|_2}, \frac{v_3}{\|v_3\|_2})$ est une base orthonormale de vecteurs propres et par suite $M = PD^tP$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1/2)$$

▼ Soit $x = (1, 1, 0)$ et soient y et z ses projetés orthogonaux sur E_1 et E_{10} respectivement.

Q.10 ▷ Montrer que $y = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ puis déduire z .

$$\text{On a } y = P_{E_1}(x) = \langle x, \frac{v_1}{\|v_1\|_2} \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \langle (1, 1, 0), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \rangle (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

$$\text{Comme } x = y + z \text{ (car } E_1 \oplus^\perp E_{10} = \mathbb{R}^3) \text{ on a alors } z = x - y = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}).$$

Q.11 ▷ Calculer la distance de x à E_1 puis à E_{10} .

$$d(x, E_1) = \|x - y\|_2 = \|z\|_2 = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{-2}{3})^2} = 1. \quad (1/2)$$

$$d(x, E_{10}) = \|x - z\|_2 = \|y\|_2 = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = 1. \quad (1/2)$$

Ou bien utiliser le **théorème de Pythagore** :

$$\|x\|^2 = 2 = d(x, E_{10})^2 + d(x, E_1)^2 \implies d(x, E_{10})^2 = 2 - d(x, E_1)^2 = 1.$$

Partie B : Etude du cas général

Q.12 ▷ Montrer que si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée alors il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $x_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n \alpha_i x_i$. Par suite $\langle x_j, x_k \rangle = \sum_{i=1, i \neq k}^n \alpha_i \langle x_j, x_i \rangle, \forall 1 \leq j \leq n$. Ainsi la k -ème colonne de $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une combinaison linéaire des autres colonnes et par conséquent son déterminant est nul c'est-à-dire $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. (1/4)

▼ On suppose que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre. Notons $F = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F . Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q.13 ▷ Montrer que $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Par définition de A , on a $x_i = \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k, \forall 1 \leq i \leq n$ et comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F , alors (1/2) commencer le calcul bilinéarité du produit scalaire

$$\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n \quad (1)$$

Q.14 ▷ En déduire que $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^t A A$.

Il est clair que ${}^t A A = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, d'où

$$\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^t A A. \quad (1)$$

Q.15 ▷ Dédurre que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det({}^t A A) = \det({}^t A) \det(A) = \det(A)^2 \geq 0$. (1/2)
Or A est inversible car $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre, donc $\det(A) \neq 0$. Ainsi

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0. \quad (1)$$

Q.16 ▷ Vérifier que $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et déduire que toutes les valeurs propres de $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont réelles et non nulles.

Comme $\langle x_i, x_j \rangle = \langle x_j, x_i \rangle$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$, alors $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une matrice symétrique réelle. Donc d'après le **théorème spectral**, toutes ses valeurs propres sont réelles et comme (1/4)
(1/4) $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ alors aucune de ces valeurs propres n'est nulle. Ainsi toutes les valeurs propres de $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont réelles et non nulles. (1)

Q.17 ▷ Vérifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$${}^t X \cdot \text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot X = \|AX\|_2^2$$

et déduire que les valeurs propres de $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont strictement positives.

• ${}^t X \text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) X = {}^t X {}^t A A X = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|_2^2$. (1/2)
• Si λ est une valeur propre de $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors $\exists V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) V = \lambda V$ et donc ${}^t V \lambda V = \|AV\|_2^2 = \lambda \|V\|_2^2 \geq 0$. D'où $\lambda \geq 0$. Or $\lambda \neq 0$ donc $\lambda > 0$. (1/4)

Q.18 ▷ En déduire que pour tout $\lambda \in \text{Spec}(\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n))$, on a $\lambda < \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Notons $\text{Spec}(\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \quad (1/2)$$

D'après Q.17 toutes les λ_i sont strictement positives. On déduit donc si $n > 1$

$$\lambda < \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2, \forall \lambda \in \text{Spec}(\text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

▼ On conserve les mêmes hypothèses et notations que celles données juste après la question Q.12. Soient $x \in E$ et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F .

Q.19 ▷ Justifier que $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$.

Par définition du projeté orthogonal, on a $x - p_F(x) \in F^\perp$, en particulier $p_F(x)$ et $(x - p_F(x))$ sont orthogonaux et par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2.$$

Q.20 ▷ Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x))$.

Par multilinéarité de G , on a

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) &= G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x) + p_F(x)) \\ &= G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x)) + G(x_1, x_2, \dots, x_n, p_F(x)) \end{aligned}$$

or $(x_1, x_2, \dots, x_n, p_F(x))$ est liée, donc $G(x_1, x_2, \dots, x_n, p_F(x)) = 0$ et par suite

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x)).$$

Q.21 ▷ Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|^2 \cdot G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ puis que

$$d(x, F) = \left(\frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $d(x, F)$ désigne la distance de x au sous-espace F .

$$\text{On a } G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x)) = \begin{vmatrix} \text{Gram}(x_1, x_2, \dots, x_n) & 0 \\ * & \vdots \\ * & 0 \\ * & \dots & * & \|x - p_F(x)\|^2 \end{vmatrix} \quad (1/4)$$

car $x - p_F(x) \in F^\perp$ et donc $\langle x - p_F(x), x_i \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

On développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, x - p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|^2 G(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1/4)$$

et par la question précédente, on déduit que

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = \|x - p_F(x)\|^2 G(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1/4)$$

et comme $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est non nul (d'après Q.15), alors

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \left(\frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1/4)$$

Q.22 ▷ Montrer alors par récurrence que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$ avec égalité si, et seulement si, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale.

Si $n = 1$, $G(x_1) = |\langle x_1, x_1 \rangle| = \|x_1\|^2 \rightarrow$ vrai (1/4)

Soit $n \geq 1$, supposons que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$ et qu'on a égalité si, et seulement si, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale et montrons le résultat pour $n + 1$.

On a $G(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = \|x_{n+1} - p_F(x_{n+1})\|^2 G(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Or $\|x_{n+1} - p_F(x_{n+1})\|^2 \leq \|x_{n+1}\|^2$ (d'après Q.19). Donc

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \leq \|x_{n+1}\|^2 G(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \|x_{n+1}\|^2 \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2 = \prod_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2. \quad (1/4)$$

De plus on a égalité si, et seulement si, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale et $\|x_{n+1} - p_F(x_{n+1})\|^2 = \|x_{n+1}\|^2$ c'est-à-dire $p_F(x_{n+1}) = 0$ ou encore $x_{n+1} \in F^\perp$ ce qui prouve qu'on a égalité si, et seulement si, $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ est une famille orthogonale. Le résultat se déduit par récurrence. (1/2)

1/2 si l'étudiant ne démontre que l'inégalité

▼ Application : Matrices de Hilbert

On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $n \geq 1$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à $n - 1$ et on le munit du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt \quad \forall P, Q \in E.$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $P_i(X) = X^{i-1}$.

Q.23 ▷ Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

On a :

- Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$. Ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. (1/4)
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, P_1, P_2 et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\begin{aligned} \langle \alpha P_1 + P_2, Q \rangle &= \int_0^1 (\alpha P_1(t) + P_2(t)) Q(t) dt \\ &= \alpha \int_0^1 P_1(t) Q(t) dt + \int_0^1 P_2(t) Q(t) dt \\ &= \alpha \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle \end{aligned} \quad (1/4)$$

ce qui prouve que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable et par symétrie, on déduit qu'elle est bilinéaire.

- $\langle P, P \rangle = \int_0^1 (P(t))^2 dt \geq 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ce qui prouve la positivité. (1/4)

- $\langle P, P \rangle = 0 \iff \int_0^1 (P(t))^2 dt = 0$ et comme la fonction $t \mapsto (P(t))^2$ est continue positive sur $[0, 1]$, alors $P(t) = 0 \forall t \in [0, 1]$. Ce qui implique que P est un polynôme admettant une infinité de racines et par conséquent c'est le polynôme nul. (1/4)

Finalement, on conclut que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Q.24 ▷ Calculer $\langle P_i, P_j \rangle$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \langle P_i, P_j \rangle = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}. \quad (1)$$

Q.25 ▷ On appelle matrice de Hilbert d'ordre $n \geq 1$, la matrice $H_n = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Déduire que les valeurs propres de H_n sont strictement positives.

H_n est la matrice de Gram de $P_1, \dots, P_n$ avec la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre car il s'agit d'une famille de polynômes de degrés deux à deux différents. Par suite, d'après Q.17, les valeurs propres de H_n sont strictement positives. (1)

Problème II

Partie A

Q.26 ▷ Soit ζ la fonction définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que ζ est continue, décroissante sur $]1, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

Posons $\zeta_n(x) = \frac{1}{n^x}$, pour tous $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

• Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$, on a

$$|\zeta_n(x)| \leq \frac{1}{n^a}, \forall x \in [a, b], \forall n \geq 1 \quad (1/4)$$

et comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge ($a > 1$), alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \zeta_n$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$ et comme ζ_n est continue sur $]1, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$, alors ζ est continue sur $]1, +\infty[$. (1/4)

• On a $|\zeta_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in [2, +\infty[$, $n \geq 1$ et comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \zeta_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[2, +\infty[$. Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x \ln(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases} \quad (1/4)$$

alors, d'après le **théorème de la double limite**, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta_n(x) \right) = 1$$

• Pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln(n)}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$ et par convergence simple, on déduit que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$. (1/4)

▼ Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

Q.27 ▷ Justifier que I_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et $t^p e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction $t \mapsto t^p e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et par suite I_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}$. (1)

Q.28 ▷ Ecrire I_{p+1} en fonction de I_p et déduire une expression simple de I_p .

On pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= t^{p+1} & \longrightarrow & \quad u'(t) = (p+1)t^p \\ v'(t) &= e^{-t} & \longrightarrow & \quad v(t) = -e^{-t} \end{aligned}$$

et en intégrant par parties, on obtient :

$$I_{p+1} = \int_0^{+\infty} t^{p+1} e^{-t} dt = \left[-t^{p+1} e^{-t} \right]_0^{+\infty} + (p+1) \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = (p+1) I_p \quad (1/2)$$

On a $I_{p+1} = (p+1) I_p, \forall p \in \mathbb{N}$ et par itération, on obtient $I_p = p! I_0$ or $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ et donc $I_p = p!, \forall p \in \mathbb{N}$. (1/2)

Q.29 ▷ En déduire que pour tout réel $a > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\int_0^{+\infty} t^p e^{-at} dt = \frac{p!}{a^{p+1}}$.

On pose $u = at, dt = \frac{du}{a}$ et donc

$$\int_0^{+\infty} t^p e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{a}\right)^p e^{-u} \frac{du}{a} = \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} u^p e^{-u} du = \frac{I_p}{a^{p+1}} = \frac{p!}{a^{p+1}} \quad (1)$$

Q.30 ▷ Vérifier que pour tout réel $t > 0$ on a : $\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ et en utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**

déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} dt = p! \zeta(p+1).$$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} e^{-nt} = \sum_{n \geq 1} (e^{-t})^n$ est convergente comme étant série géométrique avec $|e^{-t}| < 1$ (car $t > 0$) et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1}, \quad \forall t > 0 \quad (1/4)$$

D'après la question précédente, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} t^p e^{-nt} = \frac{t^p}{e^t - 1}, \quad \forall t > 0$. Posons $g_n(t) = t^p e^{-nt}, n \geq 1$ et $t \in]0, +\infty[$.

- (1/4) {
- Il est clair la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $g(t) = \frac{t^p e^{-t}}{1 - e^{-t}}, t \in]0, +\infty[$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
 - D'après Q.29, g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.
 - D'après Q.29, on a $\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} t^p e^{-nt} dt = \frac{p!}{n^{p+1}}$ et comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{p!}{n^{p+1}}$ converge (car $p+1 \geq 2 > 1$), alors d'après le **théorème d'intégration terme à terme**, on déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g_n(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) dt$$

c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!}{n^{p+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^p e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$ ou encore (1/4)

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} dt = p! \zeta(p+1), \quad \forall p \geq 1}$$

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$.

Q.31 ▷ Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0^+ , en effet $\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{xt}{t} = x$ et au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- on a $f(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-xt)}{e^t - 1} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et donc f est impaire. (1/4)

Q.32 ▷ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. (On rappelle que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

Posons $\varphi(x, t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}, x \in \mathbb{R}, t \in]0, +\infty[$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- $\forall t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a

$$|\varphi(x, t)| = \left| \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \right| \leq \frac{|x|t}{e^t - 1} \leq \frac{c \cdot t}{e^t - 1}, \quad \forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[\quad (1/2)$$

avec $c = \max(|a|, |b|)$ et comme la fonction $t \mapsto \frac{c \cdot t}{e^t - 1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après Q.30). Finalement, on déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$. (1/2) theorem

▼ Q.33 ▷ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on a

$$\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!(e^t - 1)}.$$

D'après le développement en série entière de la fonction sin on a

$$\sin(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (xt)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$$

et donc

$$\frac{\sin(xt)}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!(e^t - 1)}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0, +\infty[\quad (1)$$

Q.34 ▷ En utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**, déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1}$$

et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

Posons $h_n(t) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{t^{2n+1}}{e^t - 1}, n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, +\infty[$.

• D'après la question précédente la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction

$h(t) = \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}, t \in]0, +\infty[$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. (1/4)

• D'après Q.30, h_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{e^t - 1} dt = |x|^{2n+1} \zeta(2n+2)$$

or $|x|^{2n+1} \zeta(2n+2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^{2n+1}$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ et comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge si $|x| < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} |x|^n \zeta(2n+2)$ converge et d'après le **théorème d'intégration terme à terme**, on déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} h_n(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt \quad (1/4)$$

Ainsi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1} \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Finalement, on remarque que pour $x = 1$ cette série diverge car $|(-1)^n \zeta(2n+2)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$ ce qui prouve que le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$. On peut aussi appliquer la règle de D'Alembert :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \zeta(2n+4) x^{2n+3}}{(-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1}} \right| = \frac{\zeta(2n+4)}{\zeta(2n+2)} \cdot x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$$

et on déduit que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1}$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$ ce qui prouve que $R = 1$. (1/2)

▼ Q.35 ▷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-nt} dt = \frac{x}{n^2 + x^2}.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. La fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-nt}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et $\sin(xt)e^{-nt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1, +\infty[$ donc la fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-nt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. (1/2)

• On a

$$\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-nt} dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{ixt} e^{-nt} dt \right) = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-n+ix)t} dt \right)$$

or

$$\int_0^{+\infty} e^{(-n+ix)t} dt = \left[\frac{e^{(-n+ix)t}}{-n+ix} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n-ix} = \frac{n+ix}{n^2+x^2}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-nt} dt = \frac{x}{n^2+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1 \quad (1/2)$$

Q.36 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$.

(1/4) { On a $\frac{\sin(xt)}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(xt)e^{-nt}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]0, +\infty[$.
Posons $k_n(t) = \sin(xt)e^{-nt}, t \in]0, +\infty[, n \geq 1$.

• Il est clair la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} k_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $k(t) = \frac{\sin(xt)}{e^t-1}, t \in]0, +\infty[$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
• D'après la question précédente, k_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $n \geq 1$.
• On a

(1/4) $\int_0^{+\infty} |k_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} |\sin(xt)| e^{-nt} dt \leq |x| \int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{|x|}{n^2}$

(1/4) $\left(\int_0^{+\infty} t e^{-nt} dt = \frac{1}{n^2} \right)$ d'après Q.29) et comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|}{n^2}$ converge, alors d'après le **théorème d'intégration terme à terme**, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} k_n(t) dt \right) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} k_n(t) dt = \int_0^{+\infty} k(t) dt$$

c'est-à-dire

(1/4) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-nt} dt \right), \forall x \in \mathbb{R}$

ou encore

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Partie C

Q.37 ▷ En intégrant par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt = (-1)^n \frac{x \operatorname{sh}(\pi x)}{n^2 + x^2}.$$

On pose

$$u(t) = \operatorname{ch}(xt) - 1 \rightarrow u'(t) = x \operatorname{sh}(xt)$$

$$v'(t) = \cos(nt) \rightarrow v(t) = \frac{1}{n} \sin(nt)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt &= \left[\frac{1}{n} \sin(nt) (\operatorname{ch}(xt) - 1) \right]_0^\pi - \frac{x}{n} \int_0^\pi \operatorname{sh}(xt) \sin(nt) dt \\ (1/2) \quad &= -\frac{x}{n} \int_0^\pi \operatorname{sh}(xt) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

On pose

$$u(t) = \operatorname{sh}(xt) \rightarrow u'(t) = x \operatorname{ch}(xt)$$

$$v'(t) = \sin(nt) \rightarrow v(t) = -\frac{1}{n} \cos(nt)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt &= -\frac{x}{n} \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \operatorname{sh}(xt) \right]_0^\pi - \frac{x^2}{n^2} \int_0^\pi \operatorname{ch}(xt) \cos(nt) dt \\ (1/2) \quad &= -\frac{x}{n} \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) \operatorname{sh}(xt) \right]_0^\pi - \frac{x^2}{n^2} \left[\int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt + \underbrace{\int_0^\pi \cos(nt) dt}_{=0} \right] \\ &= \frac{x \cos(n\pi) \operatorname{sh}(\pi x)}{n^2} - \frac{x^2}{n^2} \int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt \end{aligned}$$

Ainsi $(1 + \frac{x^2}{n^2}) \int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt = (-1)^n \frac{x \operatorname{sh}(\pi x)}{n^2}$, d'où

$$\boxed{\int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt = (-1)^n \frac{x \operatorname{sh}(\pi x)}{n^2 + x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

Q.38 ▷ Montrer que $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$ pour tout $t \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{t}{2}} \frac{1 - e^{int}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{-2i \sin(\frac{t}{2})} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{ie^{i\frac{t}{2}} - ie^{i(n+\frac{1}{2})t}}{2 \sin(\frac{t}{2})} \right) = \frac{-\sin(\frac{t}{2}) + \sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \\ (1) \quad &\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}, \forall t \in]0, \pi], \forall n \in \mathbb{N}^*} \end{aligned}$$

Q.39 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x \operatorname{sh}(\pi x)}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sh}(\pi x)}{2x} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt.$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x \operatorname{sh}(\pi x)}{k^2 + x^2} &= \sum_{k=1}^n \left(\int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \cos(nt) dt \right) \\
 &= \int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \sum_{k=1}^n \cos(nt) dt \\
 (1/2) \quad &= \int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} \right) dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi (\operatorname{ch}(xt) - 1) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \\
 (1/2) \quad &= \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sh}(\pi x)}{2x} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((n + \frac{1}{2})t) dt
 \end{aligned}$$

Q.40 ▷ Montrer que la fonction $\psi : t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, puis déduire à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0.$$

(1/4) • La fonction $\psi : t \mapsto \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})}$ est de classe C^1 sur $]0, \pi]$ et $\frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{\sin(\frac{t}{2})} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\frac{(xt)^2}{2}}{\frac{t}{2}} = x^2 t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, ce qui prouve que ψ se prolonge par continuité en 0^+ en rajoutant le point $\psi(0) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
 \psi'(t) &= \frac{x \operatorname{sh}(xt) \sin(\frac{t}{2}) - \frac{1}{2} \cos(\frac{t}{2}) (\operatorname{ch}(xt) - 1)}{(\sin(\frac{t}{2}))^2} \\
 &= \frac{x \operatorname{sh}(xt)}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2} \frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{(\sin(\frac{t}{2}))^2}, \forall t \in]0, \pi]
 \end{aligned}$$

(1/4) or $\frac{x \operatorname{sh}(xt)}{\sin(\frac{t}{2})} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^2 t}{\frac{t}{2}} = 2x^2$ et $\frac{\operatorname{ch}(xt) - 1}{(\sin(\frac{t}{2}))^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\frac{(xt)^2}{2}}{\frac{t^2}{4}} = 2x^2$ et par suite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \psi'(t) = x^2$ et par conséquent ψ est dérivable en 0^+ et $\psi'(0) = x^2$ et clairement ψ' est continue en 0^+ . Finalement, la fonction ψ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

• En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \psi(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt &= \left[-\frac{\psi(t) \cos((n + \frac{1}{2})t)}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \psi'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt \\
 (1/4) \quad &= \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi \psi'(t) \cos((n + \frac{1}{2})t) dt
 \end{aligned}$$

$$(1/4) \Rightarrow \left| \int_0^\pi \psi(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \right| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi |\psi'(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ d'où le résultat.}$$

Q.41 ▷ Dédurre que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}$.

En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité démontrée dans la question Q.39, on obtient

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x}{k^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Q.42 ▷ En utilisant la question Q.36, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x).$$

Pour tout réel x , on a

$$(1/2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n)^2 + x^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2 + x^2}$$

et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(2n)^2 + x^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(2n+1)^2 + x^2}$$

$$(1/2) \quad \text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} + f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(2n)^2 + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{x}{2}}{n^2 + (\frac{x}{2})^2} = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ce qui prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2 + x^2} = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

▼ On pose $\phi(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $\phi(0) = 0$.

Q.43 ▷ Vérifier que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}.$$

• Il est clair que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et

$$(1/4) \quad \phi(x) = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}$$

$$(1/4) \quad \begin{aligned} &= \frac{\pi x \operatorname{ch}(\pi x) - \operatorname{sh}(\pi x)}{2x \operatorname{sh}(\pi x)} \\ &= \frac{\pi x \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{2}\right) - \left(\pi x - \frac{(\pi x)^3}{6}\right) + o(x^3)}{2\pi x^2 + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{1}{3}(\pi x)^3}{2\pi x^2} = \frac{\pi^2}{6} x \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 = \phi(0) \end{aligned}$$

donc ϕ est continue en 0 et par suite continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) &= \frac{\pi \operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{1}{x} - \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x} \\ (1/4) \quad &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \right) - \frac{1}{2x} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{2(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right))^2}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \right) - \frac{1}{2x} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \right) - \frac{1}{2x} \\ (1/4) \quad &= \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Q.44 ▷ Dédurre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)$.

D'après les questions Q.41 et Q.42, on a

$$\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

et d'après la question Q.43, on obtient $\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x), \forall x \in \mathbb{R}^*$. Cette égalité est encore vraie

(1) pour $x = 0$, d'où $\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Q.45 ▷ Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \phi(x)$.

On a $\phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ et donc

$$\phi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) - \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) = f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \left(\phi\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) - \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

c'est-à-dire $\phi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - \phi(x) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ et lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\phi(0) - \phi(x) = f(0) - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. D'où $f(x) = \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(1)

Partie D

Q.46 ▷ En utilisant l'expression de f à l'aide de ϕ , vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$(f(x))^2 + \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} & (f(x))^2 + \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{x}f(x) \\ &= \left(\frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \operatorname{sh}^2(\pi x) - \operatorname{ch}^2(\pi x)}{\operatorname{sh}^2(\pi x)} + \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{1}{x} \left(\frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2 \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x} \right) \\ &= \left[\frac{\pi^2 \operatorname{ch}^2(\pi x)}{4 \operatorname{sh}^2(\pi x)} - \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2x \operatorname{sh}(\pi x)} + \frac{1}{4x^2} \right] + \left[\frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}^2(\pi x)}{\operatorname{sh}^2(\pi x)} \right) + \frac{1}{4x^2} \right] + \left[\frac{\pi \operatorname{ch}(\pi x)}{2x \operatorname{sh}(\pi x)} - \frac{1}{2x^2} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

(1) Donc $(f(x))^2 + \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$

Q.47 ▷ En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$(f(x))^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2}\zeta(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(n + \frac{3}{2} \right) \zeta(2n+2) x^{2n}.$$

On a $(f(x))^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{x}f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ et donc

$$\begin{aligned}
 (1/4) \quad (f(x))^2 &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+1) \zeta(2n+2) x^{2n} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1} \\
 &= \frac{\pi^2}{4} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2n+2) x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n} \\
 (1/4) \quad &= \frac{\pi^2}{4} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(n + \frac{3}{2}\right) \zeta(2n+2) x^{2n} \\
 (1/4) \quad &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} \zeta(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(n + \frac{3}{2}\right) \zeta(2n+2) x^{2n}, \quad \forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}
 \end{aligned}$$

et par continuité de f en 0 cette égalité vraie pour $x = 0$, d'où

$$(1/4) \quad (f(x))^2 = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} \zeta(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(n + \frac{3}{2}\right) \zeta(2n+2) x^{2n}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Q.48 ▷ En utilisant le **produit de Cauchy**, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \zeta(2k+2) \zeta(2n-2k) \right) x^{2n}.$$

On a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1}$, $\forall x \in]-1, 1[$ et comme une série entière converge absolument sur son disque de convergence, alors par la formule du **produit de Cauchy**, on obtient :

$$(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

avec

$$\begin{aligned}
 (1/2) \quad W_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \zeta(2k+2) x^{2k+1} (-1)^{n-k} \zeta(2(n-k)+2) x^{2(n-k)+1} \\
 &= (-1)^n x^{2n+2} \sum_{k=0}^n \zeta(2k+2) \zeta(2(n-k)+2)
 \end{aligned}$$

donc

$$(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=0}^n \zeta(2k+2) \zeta(2(n-k)+2) \right) x^{2n+2}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

ou encore

$$(1/2) \quad (f(x))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \zeta(2k+2) \zeta(2n-2k) \right) x^{2n}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Q.49 ▷ Dédurre que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \zeta(2n) = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k) \zeta(2n-2k).$$

D'après l'unicité du développement en série entière, les questions Q.39 et Q.38 donnent :

$$\begin{cases} \frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2}\zeta(2) = 0 \\ (-1)^{n-1}(n + \frac{3}{2})\zeta(2n+2) = (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \zeta(2k+2)\zeta(2n-2k) \right), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1/4)$$

(1/2) pour zeta(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \\ (n + \frac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{k=0}^{n-2} \zeta(2k+2)\zeta(2n-2k-2), \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$

(1/4) $\Leftrightarrow \begin{cases} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \\ (n + \frac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k)\zeta(2n-2k), \quad \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1/2) \text{ pour } \zeta(2n) = (1/4) + (1/4)$

Q.50 ▷ Vérifier que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

D'après la question précédente, on a (pour $n = 2$) :

$$(2 + \frac{1}{2})\zeta(4) = \sum_{k=1}^1 \zeta(2k)\zeta(4-2k).$$

(1/2) Ce qui donne $\frac{5}{2}\zeta(4) = \zeta(2)^2$ et donc $\zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{\pi^4}{36} = \frac{\pi^4}{90}$.

Pour $n = 3$, on a $\frac{7}{2}\zeta(6) = \sum_{k=1}^2 \zeta(2k)\zeta(6-2k) = 2\zeta(2)\zeta(4)$ et donc

(1/2) $\zeta(6) = \frac{4}{7}\zeta(2)\zeta(4) = \frac{4}{7} \cdot \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^6}{945}$

★ Fin de l'épreuve ★