



Concours Physique et Chimie
Épreuve de Mathématiques

Session 2025	Date : 27/05/2025	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix. La clarté et la précision de la rédaction seront prises dans l'appréciation de la copie.

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Problème 1

Partie I. Calcul de la somme d'une série

Q.1 ▷ On admet que la somme de la série convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est égale à $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer, après avoir justifier son existence, la somme $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Q.2 ▷ ► Déterminer le domaine de convergence D de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n+1}$.

► On pose $\forall x \in D$, $L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$. Exprimer L à l'aide de fonctions usuelles.

(On rappelle que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, $|x| < 1$.)

Q.3 ▷ ► Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$. Justifier l'existence de I .

► Montrer que pour $0 < x < 1$, $\int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -\frac{1-x}{x} \ln(1-x) - \frac{x+1}{x} \ln(1+x)$.

► Dédurre la valeur de I .

Q.4 ▷ ► En utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**, montrer que $I = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$.

► En déduire que $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)} = 2 \ln(2)$.

Q.5 ▷ Posons $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})^2}$. En vérifiant que $2S_1 - S_2 = \frac{1}{4}S_3$, calculer la somme S_3 .

Partie II. Étude locale de la fonction F

Pour tout $t \in]0, 1[$, on pose $h(t) = \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$. On définit pour tout $x \in]-\infty, 1[$ la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x} h(t) dt.$$

- Q.6** ▷ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0, a]$.
- Q.7** ▷ Établir que la fonction F est bien définie sur $J =]-\infty, 1[$.
- Q.8** ▷ Montrer que la fonction F est continue sur J .
- Q.9** ▷ ► Prouver que la fonction $t \mapsto t h(t)$ est bornée sur $]0, 1[$.
 ► En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- Q.10** ▷ Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\int_0^1 t^{-x} \ln(t) dt$, $x < 1$.
- Q.11** ▷ ► En admettant que $\forall t \in]0, 1[, \left| \frac{\ln(1-t)}{t} \right| \geq 1$, vérifier que
- $$F(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| \frac{|\ln(1-t)|}{t} dt \geq \frac{1}{(1-x)^2}.$$
- En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.
- Q.12** ▷ Montrer que la fonction F est de classe C^∞ sur J puis donner, pour tout entier $k \geq 1$, l'expression de $F^{(k)}$ sous forme intégrale.
- Q.13** ▷ ► Pour tout réel $t > 0$, développer en série entière la fonction $u \mapsto t^{-u}$.
 ► Calculer le rayon de convergence de cette série.
 ► Vérifier alors que

$$F(x) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) dt, \text{ où } S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) x^k, \text{ et } f_k(t) = \frac{(-\ln t)^k}{k!} h(t), \quad 0 \leq k \leq n.$$

- Q.14** ▷ En utilisant le **théorème de la convergence dominée**, montrer qu'au voisinage de 0, on a

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \text{ avec } c_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln t)^k h(t) dt.$$

- Q.15** ▷ ► Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$?
 ► En utilisant le fait que $c_k \sim_{k \rightarrow +\infty} k$, déterminer la nature de cette série quand $|x| = R$.

Partie III. Développement en série de la fonction F

Q.16 ▷ Développer en série entière la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$. Préciser le rayon de convergence de cette série.

Q.17 ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$, calculer $u_n(x) = \int_0^1 t^{n-x} \ln(t) dt$.

Q.18 ▷ Montrer alors soigneusement que $\forall x \in J, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)^2}$.

Problème 2

Notations :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier n , on désigne par :

- $\mathbb{R}_n[X]$ le sous espace de $\mathbb{R}[X]$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

Objectif : On se propose, dans ce problème, d'étudier quelques propriétés et applications des polynômes de Lagrange.

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\{a_1, \dots, a_n\}$ désigne une famille de n réels distincts.

Partie I. Étude d'un produit scalaire particulier

Q.19 ▷ Pour tout couple de polynômes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose

$$\langle P, Q \rangle_n := \sum_{k=1}^n P(a_k) Q(a_k).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q.20 ▷ Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le j -ème polynôme de Lagrange associé aux réels $\{a_1, \dots, a_n\}$ est donné par :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}.$$

- ▶ Vérifier que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg(L_j) = n - 1$.
- ▶ Justifier que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $L_j(a_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker donné par : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$
- ▶ Prouver que $\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_{n-1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$.
- ▶ Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$. En déduire que $\sum_{i=1}^n L_i = 1$.

Q.21 ▷ Dans cette question, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ et de la norme associée $\| \cdot \|_n$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\|P\|_n = \sqrt{\langle P, P \rangle_n}$. On pose

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } P(a_1) = 0\}.$$

- Montrer que F_1 est un hyperplan de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Prouver que $F_1^\perp \oplus D_1 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, où D_1 est la droite vectorielle engendrée par le polynôme L_1 .
- On désigne par $\mathcal{P}_{F_1}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur F_1 et par $\mathcal{P}_{D_1}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur D_1 . Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, exprimer $\mathcal{P}_{F_1}(P)$ et $\mathcal{P}_{D_1}(P)$ dans la base $\mathcal{B}$.
- On suppose que $a_1 \neq 0$. Montrer que la distance du polynôme X^{n-1} au sous-espace F_1 est donnée par : $d(X^{n-1}, F_1) = |a_1|^{n-1}$.

Q.22 ▷ **Inverse de la matrice de Vandermonde**

Par la suite, V_n désigne la matrice de Vandermonde, associée aux réels $\{a_1, \dots, a_n\}$, donnée par :

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

On note $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec $E_i = X^{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour toute famille de polynômes $S = (P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on définit la matrice :

$$A(S) = (P_j(a_i))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} P_1(a_1) & P_2(a_1) & \cdots & P_n(a_1) \\ P_1(a_2) & P_2(a_2) & \cdots & P_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(a_n) & P_2(a_n) & \cdots & P_n(a_n) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- Déterminer la matrice $A(E_1, \dots, E_n)$ puis la matrice $A(L_1, \dots, L_n)$.

On suppose que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} E_i = \sum_{i=1}^n b_{ij} X^{i-1}$, avec $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $B(S)$ la matrice telle que ses colonnes sont les vecteurs coordonnées des polynômes $P_1, \dots, P_n$ dans la base $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_n)$:

$$B(S) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- Vérifier que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_n \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_j(a_1) \\ P_j(a_2) \\ \vdots \\ P_j(a_n) \end{pmatrix}$.

- Montrer alors, que le produit des matrices V_n et $B(S)$ est égale à $A(S)$, c.-à-d. $V_n B(S) = A(S)$.

- En déduire que V_n est inversible et déterminer V_n^{-1} .

Partie II. Polynômes d'interpolation

Étant donné un ensemble de n réels $\{c_1, \dots, c_n\}$, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(a_i) = c_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Un tel polynôme s'appelle polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- Q.23** ▷ Montrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$.
(On pourra utiliser la question **Q.22**.)

Déduire que $T = \sum_{i=1}^n c_i L_i$.

- Q.24** ▷ On note, par la suite, $N(X) := \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

- Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i(X).$$

- Déduire que P est un polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$ si et seulement si

$$P - T = NQ, \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}[X].$$

- Q.25** ▷ **Application :**

- Montrer que $X^n = \prod_{i=1}^n (X - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X)$.

- Vérifier que $\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i$.

- En déduire que $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^n C_n^i = (-1)^n n!$. On rappelle que, pour $0 \leq i \leq n$, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Partie III. Polynômes orthogonaux et quadrature de Gauss

- Q.26** ▷ On considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$f(P)(X) = ((X^2 - 1)P'(X))', \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

- Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
► Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_{n+1}) = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
► Déterminer le spectre de f dans $\mathbb{R}$. Déduire que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$.

- Q.27** ▷ Par la suite, on pose : $\lambda_k = k(k+1)$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B}_f = (H_0, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des polynômes unitaires vérifiant $f(H_k) = \lambda_k H_k$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- Justifier que $\deg(H_k) = k$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q.28 ▷ Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on note :

$$(P|Q) := \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

- Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|P\| = \sqrt{(P|P)}$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$.
- Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot|\cdot))$.
- Dédire que $\mathcal{B}_f$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot|\cdot))$.
- Prouver que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(P|H_n) = 0$.

On se propose de montrer que le polynôme H_n admet n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Q.29 ▷ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Montrer que $\int_{-1}^1 H_k(t) dt = 0$.
- Montrer, par l'absurde, que H_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $] -1, 1[$.

Q.30 ▷ On désigne par $x_1, \dots, x_m$ ($m \geq 1$) les racines distinctes d'ordre impair de H_n dans $] -1, 1[$ et on note $N_m := \prod_{i=1}^m (X - x_i)$.

- Vérifier que $m \leq n$.
- Montrer que si $m < n$ alors $(N_m|H_n) = 0$.
- En déduire que H_n admet n racines simples dans $] -1, 1[$.

Dans la suite, on note $\{x_1, \dots, x_n\}$ les racines distinctes de H_n et

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - x_k}{x_j - x_k}, \quad j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

le j -ème polynôme de Lagrange associé à $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Q.31 ▷ Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $\alpha_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt$.

- Montrer que $X - x_j$ divise $L_j - 1$.
- Prouver que $\int_{-1}^1 L_j(t) dt = \int_{-1}^1 L_j^2(t) dt$.
- Dédire que $\alpha_j > 0$.
- Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

Q.32 ▷ Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

- Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = H_n Q + \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j$.
- En déduire que $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

★ Fin de l'épreuve ★

Q21 (71) 2025

REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2025



الجمهورية التونسية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
المناظرات الوطنية للدخول
إلى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2025

Concours Physique et Chimie & Technologie
Corrigé de l'Épreuve de Mathématiques

Session 2025	Date : 27/05/2025	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	------------------

Problème 1

Partie I. Calcul de la somme d'une série

Q.1 ▷ (4 cases) On admet que la somme de la série convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est égale à $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer, après avoir justifié son existence, la somme $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

(3 × 1/3)

○ On pose $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} > 0, \forall n$. On a $u_n \sim \frac{1}{4n^2}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente ce qui implique la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$. D'autre part, comme les ensembles des entiers $\{n \geq 2 \text{ pair}\}$ et $\{n \geq 1 \text{ impair}\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, alors on obtient par convergence des séries :

○ $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} S + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

○ D'où $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$.

Q.2 ▷ (5 cases)

► Déterminer le domaine de convergence D de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n+1}$.

(2 × 1/4)

○ Posons $\forall n, a_n(x) = \frac{x^{2n}}{n+1}$. On a $\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{2(n+1)}(n+1)}{x^{2n}(n+2)} \right| = |x|^2 \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|^2$. D'après la règle de d'Alembert pour les séries numériques, on conclut que $R = 1$.

○ Si $x = \pm 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ est divergente.

Le domaine de convergence de la série est donc $D =]-1, 1[$.

1606

6928

JK

- On pose $\forall x \in D$, $L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$. Exprimer L à l'aide de fonctions usuelles.

(On rappelle que $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, $|x| < 1$.)

(2 × 1/4)

⊙ On a $\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Donc $L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\frac{1}{x^2} \ln(1-x^2)$, $\forall x \in D \setminus \{0\}$.

⊙ $L(0) = 1$.

Q.3 ▷ (8 cases)

- Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$. Justifier l'existence de I .

(3 × 1/7)

⊙ Posons $g(t) = \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$, $t \in]0, 1[$. On a g est continue sur $]0, 1[$.

⊙ Au voisinage de 0 : $\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \sim_0 -\frac{t^2}{t^2} \sim_0 -1 \Rightarrow g$ est prolongeable par continuité en 0 $\Rightarrow g$ est intégrable au $\mathcal{V}(0)$.

⊙ Au voisinage de 1 : $\frac{\ln(1-t^2)}{t^2} \sim_1 \ln(1-t^2)$ avec

$\ln(1-t^2) = \ln((1-t)(1+t)) = \ln(1-t) + \ln(1+t) = \ln(1-t) \left(1 + \frac{\ln(1+t)}{\ln(1-t)}\right) \sim_1 \ln(1-t)$, et pour $x = 1-t \rightarrow_{t \rightarrow 1} 0$, on $\sqrt{x} \ln(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \ln(x) = o_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable au $\mathcal{V}(0) \Rightarrow g$ est intégrable au $\mathcal{V}(1)$.

- Montrer que pour $0 < x < 1$, $\int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -\frac{1-x}{x} \ln(1-x) - \frac{x+1}{x} \ln(1+x)$.

(3 × 1/7)

⊙ En utilisant les fonctions

$$\begin{cases} u(t) = \ln(1-t^2) \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{-2t}{1-t^2} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

dans la formule de l'intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \odot \int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt &= \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t} \right]_0^x - 2 \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} \\ &\stackrel{(*)}{=} -\frac{\ln(1-x^2)}{x} - 2 \int_0^x \frac{dt}{(1-t)(1+t)} \\ &= -\frac{\ln((1-x)(1+x))}{x} - \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ \odot &= -\frac{\ln(1-x) + \ln(1+x)}{x} - [\ln|1+t| - \ln|1-t|]_0^x \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} - \ln(1+x) + \ln(1-x) \end{aligned}$$

J.K

$$\begin{aligned}
 &= -\ln(1-x)\left(\frac{1}{x}-1\right) - \ln(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
 &= -\frac{1-x}{x}\ln(1-x) - \frac{x+1}{x}\ln(1+x).
 \end{aligned}$$

$$(*) -\frac{\ln(1-t^2)}{t} \sim_0 \frac{t^2}{t} \sim_0 t \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0.$$

- Dédurre la valeur de I .

(1 × 1/7)

- ⊙ Par convergence de l'intégrale, on conclut que

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1-x}{x} \ln(1-x) - \frac{x+1}{x} \ln(1+x) = \underline{-2\ln(2)}.$$

Q.4 ▷ (8 cases)

- En utilisant le **théorème d'intégration terme à terme**, montrer que $I = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}.$

(6 × 1/7)

- ⊙ On a d'après la question Q.2,

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n+1} dt = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt \text{ où } f_n(t) = \frac{t^{2n}}{n+1}, \quad t \in]0, 1[.$$

- ⊙ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux, positive et intégrable sur $]0, 1[$.

- ⊙ $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers $g : t \mapsto \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ qui est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

- ⊙ Nature de $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(t)| dt$:

$$\text{On a } \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{n+1} dt = \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)(n+1)}.$$

- ⊙ De plus $\frac{1}{(2n+1)(n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, ce qui implique la convergence de

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |f_n(t)| dt.$$

- ⊙ Le théorème d'intégration terme à terme est donc applicable et on conclut que

$$I = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{n+1} dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}.$$

- En déduire que $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)} = 2 \ln(2)$.

(1 × 1/7)

⊙ D'après Q.3, $I = -2 \ln(2)$, on en déduit donc que

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)} = -I = 2 \ln(2).$$

- Q.5 ▷ (3 cases) Posons $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n - \frac{1}{2})^2}$. En vérifiant que $2S_1 - S_2 = \frac{1}{4}S_3$, calculer la somme S_3 .

(2 × 1/2)

$$\begin{aligned} \odot 2S_1 - S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(n+1) - (2n+1)}{(n+1)(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2(n-1)+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2(n - \frac{1}{2}))^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n - \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} S_3. \end{aligned}$$

$$\odot \text{ D'où } S_3 = 4\left(2 \frac{\pi^2}{8} - 2 \ln(2)\right) = \pi^2 - 8 \ln(2).$$

Partie II. Étude locale de la fonction F

Pour tout $t \in]0, 1[$, on pose $h(t) = \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$. On définit pour tout $x \in]-\infty, 1[$ la fonction F par :

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x} h(t) dt.$$

- Q.6 ▷ (4 cases) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$. Montrer que si $\alpha < 1$, alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0, a]$.

(3 × 1/3)

⊙ La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est continue et positive sur $]0, a]$.

⊙ Soit $\gamma \in]\alpha, 1[$ alors $t^\gamma \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{|\ln t|^\beta} \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0$ car $\gamma > \alpha$. Donc $\frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = o_0\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$.

⊙ De plus $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est intégrable au $\mathcal{V}(0)$ car $\gamma < 1 \Rightarrow t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ est intégrable sur $]0, a]$.

Q.7 ▷ (4 cases) Établir que la fonction F est bien définie sur $J =]-\infty, 1[$.

(3 × 1/3)

⊙ La fonction $t \mapsto t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ est continue et positive sur $]0, 1[$.

⊙ Au $\mathcal{V}(0)$, $t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \sim_0 t^{-x} \frac{\ln(t)(-t)}{t} \sim_0 \frac{1}{t^x |\ln(t)|^{-1}}$.

Comme $x < 1$, alors d'après la question Q.6 on conclut que $t \mapsto \frac{1}{t^x |\ln(t)|^{-1}}$ est intégrable au $\mathcal{V}(0)$.

⊙ Au $\mathcal{V}(1)$, on a

$$t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \sim_1 \ln(t) \ln(1-t) \sim_1 \ln(1+t-1) \ln(1-t) \sim_1 (t-1) \ln(1-t) \rightarrow_{t \rightarrow 1} 0,$$

$\Rightarrow t \mapsto t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 1 $\Rightarrow$ elle est intégrable au $\mathcal{V}(1)$.

On conclut alors que F est bien définie sur $J =]-\infty, 1[$.

Q.8 ▷ (7 cases) Montrer que la fonction F est continue sur J .

(6 × 1/6)

Posons $f(t, x) = t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$, $(t, x) \in]0, 1[\times]-\infty, 1[$.

⊙ $\forall x < 1$, $t \mapsto t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

⊙ $\forall t \in]0, 1[$, $x \mapsto t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]-\infty, 1[$.

⊙ Soit $[a, b] \subset]-\infty, 1[$, alors $\forall (t, x) \in]0, 1[\times [a, b]$ on a

$$|f(t, x)| = \left| t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \right| = \left| e^{-x \ln(t)} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \right| \leq \left(t^{-b} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \right) = \varphi(t),$$

avec φ continue, positive et intégrable sur $]0, 1[$. En effet

⊙ Au $\mathcal{V}(0)$, $t^{-b} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \sim_0 t^{-b} \frac{\ln(t)(-t)}{t} \sim_0 \frac{1}{t^b |\ln(t)|^{-1}}$.

Comme $[a, b] \subset]-\infty, 1[$ alors $b < 1$, alors d'après la question Q.6, on conclut que $t \mapsto \frac{1}{t^b |\ln(t)|^{-1}}$ est intégrable au $\mathcal{V}(0)$.

⊙ Au $\mathcal{V}(1)$, on a $t^{-b} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \sim_1 \ln(t) \ln(1-t) \sim_1 (t-1) \ln(1-t) \rightarrow_{t \rightarrow 1} 0$,
 $\Rightarrow t \mapsto \varphi(t)$ est prolongeable par continuité en 1 $\Rightarrow \varphi$ elle est intégrable au $\mathcal{V}(1)$.

⊙ D'après le théorème de continuité sous signe intégrale, on conclut que F est continue sur J .

Q.9 ▷ (7 cases)

► Prouver que la fonction $t \mapsto t h(t)$ est bornée sur $]0, 1[$.

(3 × 1/6)

⊙ On a $t \mapsto t h(t) = \ln(t) \ln(1-t)$ est continue sur $]0, 1[$.

⊙ Au $\mathcal{V}(0)$, $\ln(t) \ln(1-t) \sim_0 \ln(t)(-t) \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0$.

⊙ Au $\mathcal{V}(1)$, on a $\ln(t) \ln(1-t) = \ln(1+t-1) \ln(1-t) \sim_1 (t-1) \ln(1-t) \rightarrow_{t \rightarrow 1} 0$.

Donc $t \mapsto t h(t)$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1, ce qui implique donc qu'elle est bornée sur $]0, 1[$.

- En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

(3 × 1/6)

⊙ La fonction $t \mapsto t h(t)$ est bornée sur $]0, 1[$, donc il existe $M \geq 0$ telle que $\forall t \in]0, 1[, |t h(t)| \leq M$. Ainsi

$$\begin{aligned} \odot |F(x)| &= \left| \int_0^1 t^{-x} h(t) dt \right| = \left| \int_0^1 t^{-x-1} t h(t) dt \right| \leq \int_0^1 t^{-x-1} |t h(t)| dt \leq M \int_0^1 t^{-x-1} dt \\ &\leq M \left[\frac{t^{-x}}{-x} \right]_0^1. \end{aligned}$$

⊙ D'où $|F(x)| \leq \frac{-M}{x} \rightarrow_{x \rightarrow -\infty} 0$, et par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Q.10 ▷ (5 cases) Calculer, après avoir justifier son existence, l'intégrale $\int_0^1 t^{-x} \ln(t) dt$, $x < 1$.

(4 × 1/4)

⊙ On a $t \mapsto t^{-x} \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$.

⊙ De plus au $\mathcal{V}(0)$, $t^{-x} \ln(t) = \frac{-1}{t^x |\ln(t)|^{-1}}$ est intégrable car $x < 1$.

⊙ En utilisant les fonctions

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{-x+1}}{-x+1} \end{cases}$$

dans la formule de l'IPP, on obtient

$$\begin{aligned} \odot \int_0^1 t^{-x} \ln(t) dt &= \left[\ln(t) \frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_0^1 - \frac{1}{1-x} \int_0^1 t^{-x} dt \\ &= \frac{-1}{1-x} \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_0^1 = \frac{-1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Q.11 ▷ (3 cases)

- En admettant que $\forall t \in]0, 1[, \left| \frac{\ln(1-t)}{t} \right| \geq 1$, vérifier que

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| \frac{|\ln(1-t)|}{t} dt \geq \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(1 × 1/2)

⊙ D'après l'indication et la question Q.10, on obtient directement que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 t^{-x} \ln(t) \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| \frac{|\ln(1-t)|}{t} dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-x} (-\ln(t)) dt \geq - \int_0^1 t^{-x} \ln(t) dt = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

- En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.

$$(1 \times 1/2) \\ \odot \text{ On a } F(x) \geq \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty.$$

Q.12 ▷ (8 cases) Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J puis donner, pour tout entier $k \geq 1$, l'expression de $F^{(k)}$ sous forme intégrale.

(7 × 1/7)

$$\odot \forall x < 1, t \mapsto t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \text{ est continue par morceaux et intégrable sur }]0, 1[.$$

$$\odot \forall t \in]0, 1[, x \mapsto e^{-x \ln(t)} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-\infty, 1[, \text{ et on a}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) = (-\ln(t))^k t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}.$$

$$\odot \forall x < 1, t \mapsto (-\ln(t))^k t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \text{ est continue par morceaux sur }]0, 1[.$$

$$\odot \text{ Soit } [a, b] \subset]-\infty, 1[, \text{ alors } \forall (t, x) \in]0, 1[\times [a, b] \text{ on a}$$

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) \right| = \left| (-\ln(t))^k t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} \right| \leq t^{-b} \frac{|\ln(t)|^{k+1} |\ln(1-t)|}{t} = \psi(t),$$

avec ψ continue, positive et intégrable sur $]0, 1[$. En effet

$$\odot \text{ Au } \mathcal{V}(0), \psi(t) = t^{-b} \frac{|\ln(t)|^{k+1} (-\ln(1-t))}{t} \sim_0 \frac{1}{t^b |\ln(t)|^{-(k+1)}}.$$

Comme $[a, b] \subset]-\infty, 1[$ alors $b < 1$, alors d'après Q.6 on conclut que ψ est intégrable au $\mathcal{V}(0)$.

$$\odot \text{ Au } \mathcal{V}(1), \psi(t) = t^{-b} \frac{|\ln(t)|^{k+1} |\ln(1-t)|}{t} = t^{-b} \frac{(-1)^{k+1} \ln(t)^{k+1} ((-\ln(1-t)))}{t} \\ \Rightarrow \psi(t) \sim_1 (-1)^k \ln(1+t-1)^{k+1} \ln(1-t) \sim_1 (-1)^k t^{-b} \ln(1-t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0, \\ \Rightarrow t \mapsto \psi(t) \text{ est prolongeable par continuité en } 1 \Rightarrow \psi \text{ elle est intégrable au } \mathcal{V}(1).$$

$$\odot \text{ D'après le théorème de dérivation sous signe intégrale, on conclut que } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-\infty, 1[, \text{ et on a}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x < 1, F^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) dt = (-1)^k \int_0^1 (\ln(t))^k t^{-x} h(t) dt.$$

Q.13 ▷ (5 cases)

- Pour tout réel $t > 0$, développer en série entière la fonction $u \mapsto t^{-u}$.

(1 × 1/4)

$$\odot \text{ On a pour tout réel } t > 0, t^{-u} = e^{-u \ln(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-u \ln(t))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(t))^n}{n!} u^n.$$

- Calculer le rayon de convergence de cette série.

(1 × 1/4)

⊙ Posons $\forall t > 0, \forall n, a_n = \frac{(-\ln(t))^n}{n!} \neq 0$, donc

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-\ln(t))^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(-\ln(t))^n} \right| = \frac{|\ln(t)|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow R_a = +\infty.$$

- Vérifier alors que

$$F(x) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t) dt, \text{ où } S_n(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t) x^k, \text{ et } f_k(t) = \frac{(-\ln t)^k}{k!} h(t), 0 \leq k \leq n.$$

(2 × 1/4)

$$\begin{aligned} \odot \forall x < 1, F(x) &= \int_0^1 t^{-x} \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(t))^k}{k!} x^k \right) \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(t))^k}{k!} h(t) x^k dt \\ \odot &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-\ln(t))^k}{k!} h(t) x^k}_{S_n(t)} dt. \end{aligned}$$

Q.14 ▷ (6 cases) En utilisant le **théorème de la convergence dominée**, montrer qu'au voisinage de 0, on a

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \text{ avec } c_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln t)^k h(t) dt.$$

(5 × 1/5)

- ⊙ $\forall n \in \mathbb{N}, S_n$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- ⊙ (S_n) converge simplement sur $]0, 1[$ vers $t \mapsto t^{-x} h(t)$ qui est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- ⊙ $\forall n \in \mathbb{N}, t \in]0, 1[$ et $x \in]0, 1[$, on a

$$|S_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-\ln(t))^k}{k!} h(t) x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(t))^k}{k!} h(t) x^k = t^{-x} h(t).$$
- ⊙ De plus $t \mapsto t^{-x} h(t)$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$.
- ⊙ D'après le théorème de la convergence dominée, on conclut en rappelant la question Q.13 que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-\ln(t))^k}{k!} h(t) x^k dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{(-\ln(t))^k}{k!} h(t) x^k dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^k}{k!} h(t) x^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln(t))^k h(t) dt}_{c_k} x^k. \end{aligned}$$

Q.15 ▷ (4 cases)

- Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$?

difficile

(2 × 1/3)

- ⊙ On a d'après ce qui précède, $R \geq 1$.
- ⊙ De plus, on a d'après la question Q.11 que $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$ donc $R \leq 1$. D'où $R = 1$.

- En utilisant le fait que $c_k \sim_{+\infty} k$, déterminer la nature de cette série quand $|x| = R$.

(1 × 1/3)

- ⊙ Si $|x| = R = 1$, on a $|c_k x^k| = c_k \sim_{+\infty} k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} +\infty$, on conclut alors que la série $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ diverge pour $|x| = R$.

Partie III. Développement en série de la fonction F

- Q.16 ▷ (3 cases) Développer en série entière la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$. Préciser le rayon de convergence de cette série.

(2 × 1/2)

- ⊙ On sait que pour $t \in]-1, 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$, donc $\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$.
- ⊙ La série a pour rayon de convergence $R' = 1$.

- Q.17 ▷ (4 cases)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in J$, calculer $u_n(x) = \int_0^1 t^{n-x} \ln(t) dt$.

(3 × 1/3)

- ⊙ On a $t \mapsto t^{n-x} \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$.
- ⊙ De plus au $\mathcal{V}(0)$, $t^{n-x} \ln(t) = \frac{-1}{t^{x-n} |\ln(t)|^{-1}}$ est intégrable car $x < 1$, $-n \leq 0 \Rightarrow x - n < 1$.
- ⊙ En effectuant une intégration par parties et par analogie à la question Q.10 (en remplace x par $x - n$), on obtient que

$$u_n(x) = \int_0^1 t^{n-x} \ln(t) dt = \frac{-1}{(1+n-x)^2}.$$

Q.18 ▷ (8 cases) Montrer alors soigneusement que $\forall x \in J, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)^2}$.

(5 × 1/7)

$$\odot \forall x \in J, F(x) = \int_0^1 t^{-x} \ln(t) \frac{\ln(1-t)}{t} dt = - \int_0^1 t^{-x} \ln(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1} dt = - \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n-x} \ln(t)}{n+1} dt.$$

Posons $g_n(t) = \frac{t^{n-x} \ln(t)}{n+1}, n \in \mathbb{N}, t \in]0, 1[$.

$\odot \forall n \in \mathbb{N}, g_n$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$.

$\odot \sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $t \mapsto t^{-x} h(t)$ qui est continue par morceaux sur $]0, 1[$.

$\odot$ Nature de $\sum_{n \geq 0} \int_0^1 |g_n(t)| dt$: En rappelant la question Q.17 on obtient

$$\int_0^1 |g_n(t)| dt = \int_0^1 \left| \frac{t^{n-x} \ln(t)}{n+1} \right| dt = \frac{-1}{n+1} u_n(x) = \frac{1}{(n+1)(1+n-x)^2}.$$

$\odot$ De plus $\frac{1}{(n+1)(1+n-x)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^3}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ est convergente.

(2 × 1/7)

⊙ Le théorème d'intégration terme à terme s'applique alors et on déduit que

$$\forall x \in J =]-\infty, 1[, \quad F(x) = - \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n-x} \ln(t)}{n+1} dt = - \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n-x} \ln(t)}{n+1} dt$$

$$\odot = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{n+1} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(1+n-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)^2}.$$

Problème 2

Notations :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.
- On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
- Pour tout entier n , on désigne par :
- $\mathbb{R}_n[X]$ le sous espace de $\mathbb{R}[X]$ formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si son coefficient du terme de plus haut degré vaut 1.

Objectif : On se propose, dans ce problème, d'étudier quelques propriétés et applications des polynômes de Lagrange.

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\{a_1, \dots, a_n\}$ désigne une famille de n réels distincts.

202

Partie I. Étude d'un produit scalaire particulier

Q.19 ▷ (5 cases) Pour tout couple de polynômes $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose

$$\langle P, Q \rangle_n := \sum_{k=1}^n P(a_k) Q(a_k).$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(4 × 1/4)

On a :

⊙ $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est symétrique.

⊙ $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est une forme bilinéaire .

⊙ $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est positive. En effet, soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\langle P, P \rangle_n = \sum_{k=1}^n P^2(a_k) \geq 0$.

⊙ $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est définie. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, Si $\langle P, P \rangle_n = 0$, alors $\sum_{k=1}^n P^2(a_k) = 0$.

Donc $P(a_k) = 0, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $\deg(P) \leq n-1$, alors $P = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Conclusion : $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q.20 ▷ (9 cases) Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le j -ème polynôme de Lagrange associé aux réels $\{a_1, \dots, a_n\}$ est donné par :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - a_k}{a_j - a_k}.$$

- Vérifier que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg(L_j) = n - 1$.

(1 × 1/8)

⊙ Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$L_j(X) = \frac{(X - a_1) \cdots (X - a_{j-1})(X - a_{j+1}) \cdots (X - a_n)}{(a_j - a_1) \cdots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdots (a_j - a_n)}.$$

Donc $\deg(L_j) = n - 1$.

- Justifier que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a : $L_j(a_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker donné par : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

(2 × 1/8)

On a : $L_j(X) = \frac{(X - a_1) \cdots (X - a_{j-1})(X - a_{j+1}) \cdots (X - a_n)}{(a_j - a_1) \cdots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \cdots (a_j - a_n)}, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

⊙ Si $i \neq j$, alors $a_i \in \{a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n\}$. Par suite $L_j(a_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = 0$.

⊙ Si $i = j$, alors $L_j(a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{a_j - a_k}{a_j - a_k} = 1$.

- Prouver que $\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_{n-1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$.

(3 × 1/8)

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On a : $\langle L_i, L_j \rangle_n = \sum_{k=1}^n L_i(a_k) L_j(a_k)$.

⊙ Si $i \neq j$, alors $\langle L_i, L_j \rangle_n = \sum_{k=1}^n L_i(a_k) L_j(a_k) = L_i(a_i) \underbrace{L_j(a_i)}_{=0} = 0$.

⊙ Si $i = j$, dans ce cas $\langle L_i, L_i \rangle_n = L_i(a_i) L_i(a_i) = 1$.

Ce qui prouve que $\{L_1, \dots, L_n\}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}_{n-1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$.

⊙ De plus $\text{card}(\mathcal{B}) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.

Ce qui montre que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}_{n-1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$.

- Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$. En déduire que $\sum_{i=1}^n L_i = 1$.

(2 × 1/8)

⊙ On sait que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P = \sum_{i=1}^n \langle L_i, P \rangle_n L_i.$$

$$\langle L_i, P \rangle_n = \sum_{k=1}^n L_i(a_k) P(a_k) = P(a_i).$$

⊙ En particulier, si $p \equiv 1$, alors $1 = \sum_{i=1}^n L_i$.

Q.21 ▷ (11 cases) Dans cette question, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ et de la norme associée $\| \cdot \|_n$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\|P\|_n = \sqrt{\langle P, P \rangle_n}$. On pose

$$F_1 = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } P(a_1) = 0\}.$$

- Montrer que F_1 est un hyperplan de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(2 × 1/10)

⊗ On considère la forme linéaire :

$$\begin{aligned}\psi_{a_1} : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(a_1).\end{aligned}$$

On a : $\psi_{a_1}(L_1) = L_1(a_1) = 1$, donc ψ_{a_1} est une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

⊗ Par suite, $F_1 = \ker(\psi_{a_1})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On peut aussi montrer F_1 est un sous-espace de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ contenant L_i , $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et que L_1 n'appartient pas à F_1 . Donc $\dim(F_1) = n - 1$.

- Prouver que $F_1 \oplus D_1 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, où D_1 est la droite vectorielle engendrée par le polynôme L_1 .

(1 × 1/10)

⊗ On a : Le polynôme non nul L_1 n'appartient pas à F_1 , donc, on obtient : $F_1 \oplus D_1 = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On désigne par $\mathcal{P}_{F_1}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur F_1 et par $\mathcal{P}_{D_1}$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur D_1 . Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, exprimer $\mathcal{P}_{F_1}(P)$ et $\mathcal{P}_{D_1}(P)$ dans la base $\mathcal{B}$.

(4 × 1/10)

⊗ On a : $\{L_2, \dots, L_n\}$ est une base orthonormée de F_1 .

On obtient :

$$\mathcal{P}_{F_1}(P) = \sum_{i=2}^n \langle L_i, P \rangle_n L_i, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]. \text{ Or } \langle L_i, P \rangle_n = P(a_i). \text{ ce qui donne :}$$

$$\mathcal{P}_{F_1}(P) = \sum_{i=2}^n P(a_i) L_i.$$

⊗ On sait que $\{L_1\}$ est une base orthonormée de D_1 .

⊗ Par suite : $\mathcal{P}_{D_1}(P) = \langle L_1, P \rangle_n L_1 = P(a_1) L_1, \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- On suppose que $a_1 \neq 0$. Montrer que la distance du polynôme X^{n-1} au sous-espace F_1 est donnée par : $d(X^{n-1}, F_1) = |a_1|^{n-1}$.

(3 × 1/10)

⊗ On remarque que le polynôme X^{n-1} n'appartient pas à F_1 .

⊗ On a : $(\mathbb{R}_{n-1}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle_n)$ est un espace Euclidien, donc en appliquant le théorème de projection, on obtient :

$$d(X^{n-1}, F_1) = \|X^{n-1} - \mathcal{P}_{F_1}(X^{n-1})\|_n.$$

⊗ Or d'après la question précédente, on a :

$$X^{n-1} - \mathcal{P}_{F_1}(X^{n-1}) = \mathcal{P}_{D_1}(X^{n-1}).$$

Par conséquent

$$d(X^{n-1}, F_1) = \|\mathcal{P}_{D_1}(X^{n-1})\|_n = \|\langle L_1, X^{n-1} \rangle_n L_1\|_n.$$

D'où : $d(X^{n-1}, F_1) = |a_1|^{n-1}$.

Par la suite, on pose :

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

la matrice de Vandermonde associée aux réels $\{a_1, \dots, a_n\}$.

On note $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec $E_i = X^{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Pour toute famille de polynômes $S = (P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on définit la matrice :

$$A(S) = (P_j(a_i))_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} P_1(a_1) & P_2(a_1) & \cdots & P_n(a_1) \\ P_1(a_2) & P_2(a_2) & \cdots & P_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(a_n) & P_2(a_n) & \cdots & P_n(a_n) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

► Déterminer la matrice $A(E_1, \dots, E_n)$ puis la matrice $A(L_1, \dots, L_n)$.

(2 × 1/7) ⊙ On a : $A(E_1, \dots, E_n) =$ ⊙ D'autre part, $A(L_1, \dots, L_n) =$	$\begin{pmatrix} E_1(a_1) & E_2(a_1) & \cdots & E_n(a_1) \\ E_1(a_2) & E_2(a_2) & \cdots & E_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1(a_n) & E_2(a_n) & \cdots & E_n(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = V_n.$ $\begin{pmatrix} L_1(a_1) & L_2(a_1) & \cdots & L_n(a_1) \\ L_1(a_2) & L_2(a_2) & \cdots & L_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(a_n) & L_2(a_n) & \cdots & L_n(a_n) \end{pmatrix} = I_n.$
---	--

On suppose que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} E_i = \sum_{i=1}^n b_{ij} X^{i-1}$, avec $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $B(S)$ la matrice telle que ses colonnes sont les vecteurs coordonnées des polynômes $P_1, \dots, P_n$ dans la base $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_n)$:

$$B(S) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- Vérifier que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_n \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_j(a_1) \\ P_j(a_2) \\ \vdots \\ P_j(a_n) \end{pmatrix}$.

(1 × 1/7)

⊙ Par un simple calcul matriciel, on obtient : $V_n \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_{ij}(a_1)^{i-1} \\ \sum_{i=1}^n b_{ij}(a_2)^{i-1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{ij}(a_n)^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_j(a_1) \\ P_j(a_2) \\ \vdots \\ P_j(a_n) \end{pmatrix}$.

- Montrer alors, que le produit des matrices $V_n B(S) = A(S)$.

(2 × 1/7)

- ⊙ On note, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, C_j la j -ème colonne de $V_n B(S)$.

On a : $C_j = V_n \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_j(a_1) \\ P_j(a_2) \\ \vdots \\ P_j(a_n) \end{pmatrix}$, d'après la question précédente.

ou produit matriciel

- ⊙ D'où le produit matricielle $V_n B(S)$.

- En déduire que V_n est inversible et déterminer V_n^{-1} .

(2 × 1/7)

- ⊙ On remplace dans l'égalité matricielle suivante : $V_n B(S) = A(S)$, la famille S par la famille $\{L_1, \dots, L_n\}$, on trouve : $V_n \times B(L_1, \dots, L_n) = A(L_1, \dots, L_n)$.

- ⊙ Or $A(L_1, \dots, L_n) = I_n$. Ce qui montre que V_n est inversible et que $V_n^{-1} = B(L_1, \dots, L_n)$.

Partie II. Polynômes d'interpolation

Étant donné un ensemble de n réels $\{c_1, \dots, c_n\}$, on cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(a_i) = c_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Un tel polynôme s'appelle polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- Q.23 ▷ (5 cases) Montrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$. (On pourra utiliser la question Q.22.)

Déduire que $T = \sum_{i=1}^n c_i L_i$.

(4 × 1/4)

⊙ Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc ils existent des réels $d_1, \dots, d_n$ tels que $P = \sum_{i=1}^n d_i E_i$. Or, on a :

$$V_n \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ P(a_2) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

Pour répondre à la question, il suffit de résoudre le système suivant :

$$V_n \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

- ⊙ Comme la matrice V_n est inversible,
- ⊙ On conclut qu'il existe un unique polynôme $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant : $T(a_i) = c_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- ⊙ On a $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et B est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc

$$T = \sum_{i=1}^n T(a_i) L_i = \sum_{i=1}^n c_i L_i.$$

Q.24 ▷ (7 cases) On note, par la suite, $N(X) := \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

► Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X) = N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(X).$$

(3 × 1/6)

⊙ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Effectuons la division Euclidienne de P par le polynôme non nul N . D'après le théorème de la division Euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tels que $P(X) = N(X)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(N) = n$.

⊙ Ce qui prouve que $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, par suite : $R(X) = \sum_{i=1}^n R(a_i) L_i(X)$.

On obtient : $P(X) = N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n R(a_i) L_i(X)$.

⊙ Donc, $P(a_j) = N(a_j)Q(a_j) + \sum_{i=1}^n R(a_i) L_i(a_j), \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Enfin, on montre que $P(a_j) = R(a_j), \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'où le résultat.

- Dédurre que P est un polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$ si et seulement si

$$P - T = NQ, \quad \text{où } Q \in \mathbb{R}[X].$$

(3 × 1/6)

⊙ (⇒) Si P est un polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors $P(a_i) = c_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

⊙ D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(X) &= N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i(X) \\ &= N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n c_i L_i(X) \\ &= N(X)Q(X) + T(X). \end{aligned}$$

D'où $P - T = NQ$.

⊙ (⇐) Si $P - T = NQ$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $P = NQ + T$.

Donc $P(a_i) = N(a_i)Q(a_i) + T(a_i) = c_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ce qui prouve que P est un polynôme d'interpolation aux points $(a_i, c_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Q.25 ▷ (9 cases) **Application :**

- Montrer que $X^n = \prod_{i=1}^n (X - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X)$.

(3 × 1/8)

⊙ On remplace P par X^n dans l'égalité $P(X) = N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i(X)$. On obtient :

$$X^n = N(X)Q(X) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X).$$

⊙ On a : $\deg(\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X)) \leq n - 1$, donc, en comparant les degrés des polynômes X^n et NQ , on montre que : $n = \deg(N) + \deg(Q)$. Ce qui prouve que $\deg(Q) = 0$, donc Q est un polynôme constant.

$$\text{On obtient : } X^n = cN(X) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X), \quad c \in \mathbb{R}.$$

⊙ Maintenant, on compare les coefficients dominants de X^n et de $cN(X)$. Comme N est unitaire, on déduit que $c = 1$.

$$\text{D'où, } X^n = \prod_{i=1}^n (X - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X).$$

- Vérifier que $\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i$.

(2 × 1/8)

⊙ On remplace X par 0 dans la relation précédente, on trouve :

$$0 = \prod_{i=1}^n (0 - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0).$$

⊙ Donc :

$$\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n a_i.$$

- En déduire que $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^n C_n^i = (-1)^n n!$. On rappelle que, pour $0 \leq i \leq n$, $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

(3 × 1/8)

⊙ Si $a_i = i$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\sum_{i=1}^n i^n L_i(0) = (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n i = (-1)^{n+1} n!$.

On a :

$$\begin{aligned} \odot L_i(0) &= \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{0-k}{i-k} = (-1)^{n-1} \frac{1 \times \cdots (i-1)(i+1) \times \cdots n}{(i-1) \cdots (i-(i-1))(i-(i+1)) \cdots (i-n)} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{n!}{i!(-1)^{n-i} 1 \times \cdots \times (n-i)} = (-1)^{i-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} = (-1)^{i-1} C_n^i. \end{aligned}$$

⊙ Enfin, on déduit que : $\sum_{i=1}^n (-1)^i i^n C_n^i = (-1)^n n!$.

Partie III. Polynômes orthogonaux et quadrature de Gauss

Q.26 ▷ (7 cases) On considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$f(P)(X) = ((X^2 - 1)P'(X))', \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

- Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2 × 1/6)

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $f(P)(X) = 2XP'(X) + (X^2 - 1)P''(X)$.

⊙ On remarque que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

⊙ Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$.

$\Rightarrow f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_C = (E_1, \dots, E_{n+1}) = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2 × 1/6)

⊙ Par un simple calcul, on obtient :

$$f(E_1) = f(1) = 0, f(E_2) = f(X) = 2X$$

$$\text{et } f(E_{k+1}) = f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}, \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket.$$

⊙ La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_C$:

$$M_{\mathcal{B}_C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -k(k-1) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & k(k+1) & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & n(n+1) \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R}).$$

- Déterminer le spectre de f dans $\mathbb{R}$. Dédurre que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$.

(2 × 1/6)

⊙ La matrice de f est triangulaire supérieure, donc : $S_{P_{\mathbb{R}}}(f) = \{k(k+1), \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

⊙ L'endomorphisme f admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc f est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Q.27 ▷ (9 cases) Par la suite, on pose : $\lambda_k = k(k+1), \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- Montrer qu'il existe une unique base $\mathcal{B}_f = (H_0, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des polynômes

unitaires vérifiant $f(H_k) = \lambda_k H_k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(6 × 1/8)

• Existence :

⊙ On sait que f est diagonalisable dans $\mathbb{R}_n[X]$. Par suite, il existe une base $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des vecteurs propres de f vérifiant :

$$f(S_k) = \lambda_k S_k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

⊙ Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il existe $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que :

$$S_k(X) = b_q X^q + \dots + b_0, \text{ avec } b_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \llbracket 0, q \rrbracket \text{ et } b_q \neq 0.$$

$$\text{On pose : } H_k = \frac{1}{b_q} S_k.$$

⊙ Donc H_k est aussi un vecteur propre de f associé à λ_k . De plus, H_k est unitaire et donc la famille $B = \{H_0, \dots, H_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des vecteurs propres unitaires de f .

• Unicité :

⊙ Soit $(R_0, \dots, R_n)$ une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par des vecteurs propres unitaires de f tels que $f(R_k) = \lambda_k R_k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

⊙ Donc $R_k, H_k \in E_{\lambda_k}(f)$ le sous-espace propre de f associé à λ_k . Comme λ_k est une valeur propre simple, donc $\dim(E_{\lambda_k}(f)) = 1$.

Ce qui prouve que $R_k = \alpha H_k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

⊙ Puisque R_k et H_k sont unitaires, on conclut que $R_k = H_k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

► Justifier que $\deg(H_k) = k, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(2 × 1/8)

⊙ Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note q le degré de H_k , donc $H_k(X) = X^q + b_{q-1}X^{q-1} + \dots + b_0$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a : $f(H_k) = k(k+1)H_k$.

⊙ En comparant les coefficients dominants de $f(H_k)$ et de $k(k+1)H_k$, on obtient :

$$q(q+1) = k(k+1). \text{ Ce qui prouve que } q = k.$$

Q.28 ▷ (11 cases) Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on note :

$$(P|Q) := \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

► Vérifier que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|P\| = \sqrt{(P|P)}, \forall P \in \mathbb{R}[X]$.

(2 × 1/10)

On a :

⊙ $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire et symétrique.

⊙ $(\cdot|\cdot)$ est définie positif.

En effet, soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $(P|P) = \int_{-1}^1 P^2(t) dt \geq 0$, car fonction $t \mapsto P^2(t)$ est continue positive sur $[-1, 1]$.

$(\cdot|\cdot)$ est définie : En effet, si $(P|P) = \int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$, alors $P(t) = 0, \forall t \in [-1, 1]$, cela est causé par le fait que la fonction $t \mapsto P^2(t)$ est continue positive sur $[-1, 1]$.

Par suite, le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On en déduit que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot|\cdot))$.

(2 × 1/10)

⊙ Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(f(P)|Q) = \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P'(t))'Q(t) dt$.

D'après le théorème d'intégration par parties, on obtient :

$(f(P)|Q) = - \int_{-1}^1 (t^2 - 1)P'(t)Q'(t) dt$.

⊙ On remarque que cette expression est symétrique par rapport à P et Q . Par conséquent $(f(P)|Q) = (P|f(Q))$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ce qui prouve que f est symétrique.

- Dédurre que $\mathcal{B}_f$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], (\cdot|\cdot))$.

(3 × 1/10)

⊙ Soit $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $i \neq j$, on a : $(f(H_i)|H_j) = (\lambda_i H_i|H_j) = \lambda_i (H_i|H_j)$.

⊙ D'autre part, comme f est symétrique, on a :

$(f(H_i)|H_j) = (H_i|f(H_j)) = (H_i|\lambda_j H_j) = \lambda_j (H_i|H_j)$.

On obtient : $\lambda_i (H_i|H_j) = \lambda_j (H_i|H_j)$.

⊙ Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, on déduit que : $(H_i|H_j) = 0$.

- Prouver que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(P|H_n) = 0$.

(3 × 1/10)

⊙ On a montré que $\deg(H_k) = k$, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donc $\{H_0, \dots, H_{n-1}\}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ formé par des vecteurs non nuls. De plus $\text{Card}(\{H_0, \dots, H_{n-1}\}) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Par suite $\{H_0, \dots, H_{n-1}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

⊙ Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $P = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k H_k$ avec $\beta_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

⊙ $(P|H_n) = (\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k H_k|H_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k (H_k|H_n) = 0$.

On se propose de montrer que le polynôme H_n admet n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Q.29 ▷ (6 cases) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- Montrer que $\int_{-1}^1 H_k(t) dt = 0$.

(2 × 1/5)

⊙ On remarque que $H_0 = 1$.

⊙ On a : $\int_{-1}^1 H_k(t) dt = \int_{-1}^1 H_0(t)H_k(t) dt = (H_0|H_k) = 0$, car $k \geq 1$ et $\mathcal{B}_f$ est orthogonale.

- Montrer, par l'absurde, que H_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $] -1, 1[$.

(3 × 1/5)

Supposons que H_k n'a aucune racine d'ordre impair, ce qui induit deux cas :

⊙ H_k n'admet pas de racines dans $] -1, 1[$, par suite H_k garde un signe constant dans $] -1, 1[$.

⊙ H_k n'a que des racines d'ordre pair et dans ce cas H_k garde aussi un signe constant dans $] -1, 1[$.

⊙ Puisque $\int_{-1}^1 H_k(t) dt = 0$, donc $H_k(t) = 0$, $\forall t \in] -1, 1[$. Ce qui montre que $H_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. D'où l'absurdité.

Q.30 ▷ (7 cases) On désigne par $x_1, \dots, x_m$, ($m \geq 1$) les racines distinctes d'ordre impair de H_n dans

$] -1, 1[$ et on note $N_m := \prod_{i=1}^m (X - x_i)$.

- Vérifier que $m \leq n$.

(1 × 1/6)

⊙ Le nombre des racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.

- Montrer que si $m < n$ alors $(N_m | H_n) = 0$.

(1 × 1/6)

⊙ Comme $\deg(N_m) = m < n$, donc, d'après la question Q.28, on a $(N_m | H_n) = 0$.

- En déduire que H_n admet n racines simples dans $] -1, 1[$.

(4 × 1/6)

⊙ Si $m < n$, on a : $(N_m | H_n) = \int_{-1}^1 N_m(t) H_n(t) dt = 0$.

⊙ Or, le polynôme $N_m H_n$ n'a que des racines d'ordre pair dans $] -1, 1[$. Donc, il garde un signe constant dans $] -1, 1[$.

⊙ Ce qui montre que $N_m(t) H_n(t) = 0, \forall t \in] -1, 1[$, donc $H_n = 0$ sur $] -1, 1[$.

⊙ Par suite, $H_n = 0$ admet une infinité de racines, ce qui implique que $H_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$ (absurde). On conclut que $m = n$ et que H_n admet n racines simples dans $] -1, 1[$.

Dans la suite, on note $\{x_1, \dots, x_n\}$ les racines distinctes de H_n et

$$L_j(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{X - x_k}{x_j - x_k}, \quad j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

le j -ème polynôme de Lagrange associé à $\{x_1, \dots, x_n\}$

Q.31 ▷ (11 cases) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $\alpha_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt$.

- Montrer que $X - x_j$ divise $L_j - 1$.

(2 × 1/10)

⊙ Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a : $L_j(x_j) = 1$.

⊙ Donc x_j est une racine du polynôme $L_j - 1$. On déduit que $X - x_j$ divise $L_j - 1$.

- Prouver que $\int_{-1}^1 L_j(t) dt = \int_{-1}^1 L_j^2(t) dt$.

(4 × 1/10)

⊙ On considère l'intégrale suivante : $\int_{-1}^1 (L_j^2(t) - L_j(t)) dt = \int_{-1}^1 L_j(t)(L_j(t) - 1) dt$.

Comme $X - x_j$ divise $L_j - 1$, donc il existe un polynôme $Q_j \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que :

$$L_j - 1 = (X - x_j)Q_j.$$

Alors, $\int_{-1}^1 (L_j^2(t) - L_j(t)) dt = \int_{-1}^1 L_j(t)(t - x_j)Q_j(t) dt$.

⊙ On remarque que : $L_j(X)(X - x_j) = \beta \prod_{i=1}^n (X - x_i)$, avec $\beta \in \mathbb{R}$.

⊙ D'autre part, on sait que le polynôme H_n est unitaire de degré n et il admet n racines distinctes $x_1, \dots, x_n$.

Par suite $H_n(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$.

Donc, $\int_{-1}^1 (L_j^2(t) - L_j(t)) dt = \beta \int_{-1}^1 H_n(t)Q_j(t) dt = \beta(Q_j|H_n)$.

⊙ Comme, $\deg(Q_j) < n$, alors $(Q_j|H_n) = 0$. On conclut que :

$$\int_{-1}^1 L_j(t) dt = \int_{-1}^1 L_j^2(t) dt.$$

- Dédurre que $\alpha_j > 0$.

(2 × 1/10)

⊙ D'après la question précédente, on a :

$$\alpha_j = \int_{-1}^1 L_j(t) dt = \int_{-1}^1 L_j^2(t) dt.$$

On déduit que : $\alpha_j \geq 0$.

⊙ Comme L_j est un polynôme non nul, donc $\alpha_j > 0$.

- Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

(2 × 1/10)

⊙ Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On sait que $\{L_1, \dots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc, $P = \sum_{j=1}^n P(x_j)L_j$.

⊙ $\int_{-1}^1 P(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\sum_{j=1}^n P(x_j)L_j(t) \right) dt = \sum_{j=1}^n \left(\int_{-1}^1 L_j(t) dt \right) P(x_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

Q.32 ▷ (6 cases) Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

- Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = H_n Q + \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j$.

(2 × 1/5)

⊙ On a : H_n est un polynôme non nul de degré n . Effectuons la division Euclidienne de P par H_n . Donc, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P = H_n Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(H_n) = n$.

On peut aussi remarquer que $H_n(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ et appliquer le résultat de la question Q24.

Par suite, $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $R = \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j$.

On obtient : $P = H_n Q + \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j$.

⊙ De plus, on a : $\deg(P) \leq (2n - 1)$ et $\deg(H_n) = n$, ce qui implique que : $\deg(Q) \leq n - 1$. D'où le résultat.

- En déduire que $\int_{-1}^1 P(t) dt = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

(3 × 1/5)

⊙ Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On a : $\int_{-1}^1 P(t) dt = \int_{-1}^1 H_n(t) Q(t) dt + \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^n P(x_j) L_j(t) dt$.

⊙ Or, $\int_{-1}^1 H_n(t) Q(t) dt = (Q | H_n) = 0$, car $\deg(Q) < \deg(H_n)$.

⊙ On déduit que : $\int_{-1}^1 P(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\sum_{j=1}^n P(x_j) L_j(t) \right) dt = \sum_{j=1}^n \alpha_j P(x_j)$.

★ Fin de l'épreuve ★