

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement
Supérieur



Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session: Juin 2000

Concours en Physique et Chimie et tech.

Corrigé de l'Épreuve de Mathématiques

Problème 1

Partie I

1/ 2 points

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \langle x/Jy \rangle = \langle \sum_{i=1}^N x_i e_i / y_1 e_1 - \sum_{i=2}^N y_i e_i \rangle = x_1 y_1 - \sum_{i=2}^N x_i y_i.$$

2/ a)

i) $\rightarrow$ ii) 1 point

Il suffit de prendre $x = y$.

ii) $\rightarrow$ iii) 5 points

Notons $M = {}^tAJA - J$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \langle Ax/JAx \rangle = \langle x/{}^tAJAx \rangle. \text{ Alors, } \forall x \in \mathbb{R}^N, \langle x/Mx \rangle = 0.$$

En particulier, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \langle x + y, M(x + y) \rangle = 0$.

D'où, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \langle x, My \rangle = 0$.

On conclut que $M = 0$.

iii) $\rightarrow$ i) 2 points

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \langle Ax/JAy \rangle = \langle x/{}^tAJAy \rangle = \langle x/Jy \rangle.$$

b)

$$G_N = \{A \in M(N, \mathbb{R}) / A \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{P})\}.$$

i) 1 point

Soit $A \in G_N$, on a $|\det({}^tAJA)| = |\det(J)|$. Donc, $|\det(A)|^2 = 1$. D'où, $|\det(A)| = 1$.

ii) 4 points

* Soient $A, B \in G_N$. On a

${}^t(AB)J(AB) = {}^t B^t A J A B = {}^t B J B = J$. Donc, $AB \in G_N$.

** Soit $A \in G_N$. Comme $|\det A| = 1$, alors A^{-1} existe.

On a ${}^t A J A = J$. D'où, $J = ({}^t A)^{-1} J A^{-1} = {}^t (A^{-1}) J A^{-1}$.

Donc, $A^{-1} \in G_N$.

On conclut que G_N est un sous-groupe de $GL(N, \mathbb{R})$ pour la multiplication des matrices.

Partie II On prend $N = 2$.

1/ a) 5 points

Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & \epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}; \epsilon \in \{-1, 1\}, a, b \in \mathbb{R} \text{ et } a^2 - b^2 = 1 \right\}.$$

* Il est clair que $E \subset G_2$.

* Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in G_2$.

$$\text{On a } {}^t A J A = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix}.$$

Alors, $A \in G_2$ si et seulement si ${}^t A J A = J$, ce qui est vrai si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 & (1), \\ ac = bd & (2), \\ d^2 - c^2 = 1 & (3). \end{cases}$$

D'après (1), $a \neq 0$. (2) implique alors que $c = \frac{bd}{a}$.

De (3), on déduit que $a^2 = d^2$. D'où, le résultat.

b) 5 points

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 - b^2 = 1$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$. On a $a^2 = b^2 + 1 \in [1, +\infty[$. Il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 = \cosh^2(t)$. D'où, $a = \epsilon_1 \cosh(t)$, $\epsilon_1 \in \{-1, 1\}$ et $b = \epsilon_2 \sinh(t)$, $\epsilon_2 \in \{-1, 1\}$.

En posant, $\epsilon_3 = \epsilon_1 \epsilon_2$, on obtient le résultat.

$$2/ \tilde{G}_2 = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) 2 points

* $\tilde{G}_2 \subset G_2$.

** Il est clair que $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $A(t)A(s) = A(t+s) \in \tilde{G}_2$ et $(A(t))^{-1} = A(-t) \in \tilde{G}_2$.

D'où, $\tilde{G}_2$ est un sous-groupe de G_2 .

b) 3 points

Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est:

$$\chi_{A(t)}(X) = X^2 - (2ch(t))X + 1 = (X - e^{-t})(X - e^t).$$

$$* \text{Ker}(A(t) - e^t I_2) = \text{vect} \langle e_1 + e_2 \rangle.$$

$$* \text{Ker}(A(t) - e^{-t} I_2) = \text{vect} \langle e_1 - e_2 \rangle.$$

$$\text{On prend alors, } P = \begin{pmatrix} 1 & +1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) 1 point

Soit l'application

$$\varphi: \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \tilde{G}_2 \\ t & \longrightarrow & A(t). \end{matrix}$$

Il est clair que:

* φ est un morphisme de groupes.

* $\text{Ker}\{\varphi\} = \{0\}$.

* φ est surjective.

φ est donc un isomorphisme de groupes.

$$3/ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) 1 point

On a $B^2 = I_2$. Donc, $\forall p \in \mathbb{N}$, $B^{2p} = I_2$ et $B^{2p+1} = B$.

b) 3 points

On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{t^k B^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}.$$

Partie III On prend $N=3$.

1/ 3 points

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} a & sh(t) & 0 \\ b & ch(t) & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } {}^t M J M = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & a sh(t) - b ch(t) & -c \\ a sh(t) - b ch(t) & -1 & 0 \\ -c & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M \in G_3 \text{ si et seulement si } \begin{cases} a^2 - b^2 = 1, & (1) \\ c = 0, & (2) \\ a sh(t) = b ch(t). & (3) \end{cases}$$

(3) et (1) impliquent que $a^2 = ch^2(t)$. Il existe alors $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $a = \epsilon ch(t)$ et $b = \epsilon sh(t)$. D'où,

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon ch(t) & sh(t) & 0 \\ \epsilon sh(t) & ch(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2/ 3 points

Soit $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. On veut alors résoudre l'équation:

$$X'(t) = HX(t).$$

On a $H(e_1 + e_2) = e_1 + e_2$, $H(e_1 - e_2) = -(e_1 - e_2)$, $H(e_3) = 0$. H est alors diagonalisable. Si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}HP = D$, où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Donc, } (P^{-1}X)'(t) = D(P^{-1}X)(t). \text{ Il existe alors, } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}/$$

$$P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{-t} \\ \gamma \end{pmatrix}. \text{ D'où, } X(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^t + \beta e^{-t} \\ \alpha e^t - \beta e^{-t} \\ \gamma \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

3/ a) 1 point

$${}^tAJA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ D'où, } A \in G_3.$$

b) 5 points

Le polynôme caractéristique de A est donné par:

$$\chi_A(X) = (X - 1)(-X^2 + 6X - 1).$$

Les valeurs propres de A sont donc:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}, \lambda_3 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Les espaces propres correspondants sont:

$$E_{\lambda_1} = \text{vect} \langle e_2 - e_3 \rangle, E_{\lambda_2} = \text{vect} \langle -\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3 \rangle,$$

$$E_{\lambda_3} = \text{vect} \langle \sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3 \rangle.$$

$$\text{On pose alors, } P = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (3 - 2\sqrt{2})^p & 0 \\ 0 & 0 & (3 + 2\sqrt{2})^p \end{pmatrix} P^{-1}.$$

c) 1 point

Soit $V = (a, b, c)$; $a, b, c \in \mathbb{N}$. On a

$$\langle V/JV \rangle = a^2 - b^2 - c^2.$$

Pour avoir $\langle V/JV \rangle = 0$, il suffit de prendre $V = (1, 1, 0)$.

d) 2 points

Soit $S = \{A^n V, n \in \mathbb{N}\}$. On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \langle A^{n+1}V/JA^{n+1}V \rangle = \langle A^n V/JA^n V \rangle.$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, \langle A^n V/JA^n V \rangle = 0$.

Comme A est à coefficients dans $\mathbb{N}$, A^n est aussi à coefficients dans $\mathbb{N}$. Il reste alors à montrer que l'ensemble S est infini. Pour ceci, on démontre que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, A^n v \neq A^m v.$$

Supposons qu'il existe $m < n$ dans $\mathbb{N}$ tel que $A^n v = A^m v$. Comme A est inversible, on alors, $A^{n-m} v = v$. v est donc un vecteur propre de A^{n-m} associé à la valeur propre 1, i.e. $v \in E_{\lambda_1}$, ce qui est faux. D'où la contradiction.

Problème 2

Partie I

1/ a) 3 points

Sachant que u_0 est une fonction continue à valeurs réelles, de classe C^1 par morceaux, impaire et 2π -périodique, telle que $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$, le théorème de Dirichlet implique que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad \text{où } b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(kx) dx.$$

b) 2 points

D'après le théorème de Bessel, la série $\sum |b_k|^2$ converge, d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = 0$.

2/ a) 2 points

2

Soient $\alpha > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. On a $\lim_{k \rightarrow \infty} k^p e^{-(k^2+1)\alpha} = 0$, et $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.
D'où, $\lim_{k \rightarrow \infty} k^p b_k e^{-(k^2+1)\alpha} = 0$.

b) (2 + 1 + 3 + 2) points

Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k(x, t) = b_k e^{-(k^2+1)t} \sin(kx)$, où $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[$.

On a alors, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[$,

$$\frac{\partial^{p+q} u_k}{\partial x^q \partial t^p}(x, t) = (-1)^p (k^2 + 1)^p k^q b_k e^{-(k^2+1)t} \sin(kx + q\frac{\pi}{2}).$$

D'où, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha > 0$, $\forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial^{p+q} u_k}{\partial x^q \partial t^p}(x, t) \right| \leq v_k = (k^2 + 1)^p k^q |b_k| e^{-(k^2+1)\alpha}.$$

D'après a), on a $\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 v_k = 0$. Ceci montre la convergence normale (et donc uniforme) de la série $\sum_k \frac{\partial^{p+q} u_k}{\partial x^q \partial t^p}$ sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$. D'où, $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ admet des dérivées partielles à tout ordre, continues sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$. Donc, u est de classe C^∞ sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$.

c) 2 points

On a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + u_k \right)(x, t) = 0,$$

$\forall x \in [0, \pi]$, $\forall t > 0$. Par ailleurs, il est évident que $u(x, 0) = u_0(x)$, $\forall x \in [0, \pi]$ et que $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\forall t \geq 0$.

3/ Soit v une fonction continue sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$, à valeurs réelles, de classe C^2 sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$. On pose

$$G(t) = \int_0^\pi v^2(x, t) dx.$$

a) 3 points

La fonction v^2 étant continue sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, G est continue sur $[0, +\infty[$. De même, comme v^2 est de classe C^2 sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale, implique que G est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

b) On suppose que v vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + v(x, t) = 0, \forall x \in [0, \pi], \forall t > 0, \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \forall t \geq 0. \end{cases}$$

i) 3 points

$\forall t > 0$, on a

3

$$\begin{aligned} \int_0^\pi v(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) dx &= [v(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx \\ &= - \int_0^\pi \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2(x, t) dx. \end{aligned}$$

ii) 3 points

$\forall t > 0$, on a

3

$$\begin{aligned} G'(t) &= 2 \int_0^\pi v(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^\pi v(x, t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) - v(x, t) \right) dx \\ &= -2 \int_0^\pi \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)(x, t) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Comme G est continue sur $[0, +\infty[$, G est alors décroissante sur $[0, +\infty[$.

c) 2 points

Si v vérifie en plus, la condition initiale $\forall x \in [0, \pi]$, $v(x, 0) = 0$, alors $G(0) = 0$. Comme la fonction $G(t)$ est positive et décroissante, on déduit que $G(t) = 0$, $\forall t > 0$. La fonction $v^2(x, t)$ étant continue, positive, ceci implique que v est identiquement nulle sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$.

2

d) 2 points

Soit w une fonction à valeurs réelles, continue sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$, de classe C^2 sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$ et solution du système (S) .

On pose $v = u - w$. D'après ce qui précède, $v \equiv 0$ sur $[0, \pi] \times [0, +\infty[$. D'où, $u \equiv w$.

Partie II

Soit N un entier positif. On pose $h = \frac{\pi}{N+1}$.

Soit A la matrice carrée d'ordre N , définie par:

$$A_N = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1/ 3 points

On pose $x_i = ih$, $i \in \{0, \dots, N+1\}$.

Soit u une fonction de classe C^2 sur $[0, \pi] \times]0, +\infty[$. D'après la formule de Taylor, appliquée au point x_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$u(x_{i+1}, t) = u(x_i, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + h^3 \epsilon_1(h),$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_1(h) = 0$.

$$u(x_{i-1}, t) = u(x_i, t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + h^3 \epsilon_2(h),$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_2(h) = 0$.

D'où,

$$\forall t > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))}{h^2} + h\epsilon(h),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

2/ Pour $p \in \{1, 2, \dots, N\}$, on considère le vecteur $U^p \in \mathbb{R}^N$, dont la $j^{\text{ème}}$ composante, $1 \leq j \leq N$, est:

$$u_j^p = \sin\left(\frac{pj\pi}{N+1}\right).$$

a) 2 points

On pose $u_0^p = u_{N+1}^p = 0$. Pour $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a

$$\begin{aligned} -u_{j+1}^p + 2u_j^p - u_{j-1}^p &= -\sin(p(j+1)h) + 2\sin(pjh) - \sin(p(j-1)h) \\ &= 2\sin(pjh)(1 - \cos(ph)) \\ &= 4\sin(pjh)\sin^2\left(\frac{ph}{2}\right). \end{aligned}$$

b) 3 points

Pour $p \in \{1, 2, \dots, N\}$, en appliquant la matrice A_N , au vecteur U^p , on déduit de ce qui précède que U^p est un vecteur propre de A_N associé à la valeur propre

$$\lambda_p = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{ph}{2}\right).$$

c) 2 points

Il est clair que la matrice A_N est symétrique. A_N est définie, positive, car toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

d) 2 points

Comme les espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux, et que les N valeurs propres de A_N sont distinctes, on déduit que les vecteurs U^p , $1 \leq p \leq N$, forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^N$.

3/

On considère le système différentiel:

$$(T) \begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) + A_N U(t) + U(t) = 0, \quad \forall t > 0; \\ U(0) = U^0, \end{cases}$$

où $U^0 \in \mathbb{R}^N$, est donné.

a) 3 points

Pour $t \geq 0$, on pose $\alpha_p(t) = \langle U(t)/U^p \rangle$. Si U vérifie le système différentiel (T), alors il est clair que α_p est solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\alpha_p(t) + \lambda_p \alpha_p(t) + \alpha_p(t) = 0, \quad \forall t > 0; \\ \alpha_p(0) = \langle U^0/U^p \rangle. \end{cases}$$

Il suffit d'utiliser le fait que A_N est symétrique et que $A_N U^p = \lambda_p U^p$.

b) (2 + 3) points

Il est aussi clair que $\alpha_p(t) = \langle U^0/U^p \rangle e^{-(\lambda_p+1)t}$, $\forall t \geq 0$. Comme $(U^1, \dots, U^N)$ est une base orthogonale, on déduit que

$$\forall t \geq 0, U(t) = \sum_{p=1}^N \frac{\langle U^0/U^p \rangle}{|U^p|^2} e^{-(\lambda_p+1)t} U^p.$$