

Solutions



A -

1) L'amplificateur opérationnel idéal de la figure 1 présente les caractéristiques suivantes:

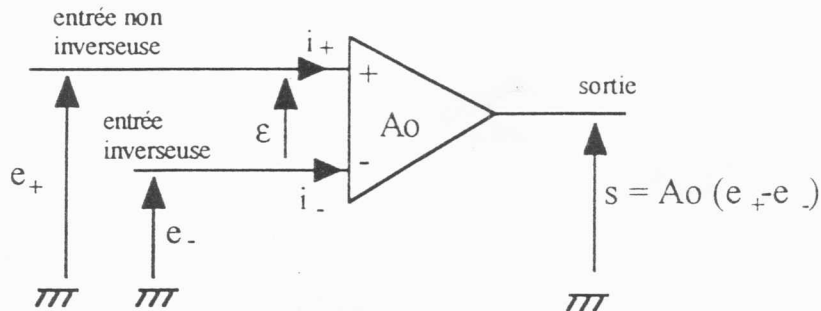


Figure 1

* Un coefficient d'amplification en tension "infini":

A_o "infini".

En conséquence, comme la tension de sortie est finie, on a nécessairement $\varepsilon = e_+ - e_- = 0$ ce qui est équivalent à $e_+ = e_-$.

* Une impédance d'entrée Z_e "infinie" (vue entre les bornes e_+ et e_-)

Z_e "infini"

et par conséquent les courants i_+ et i_- sont nuls:

$i_+ = i_- = 0$

* Une impédance de sortie Z_s nulle:

$Z_s = 0$

0,5

2) Le coefficient d'amplification du circuit de la figure 2 est $A_v = \frac{s(t)}{e(t)}$

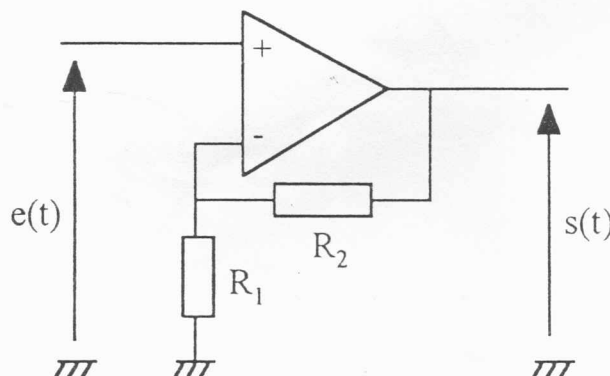


Figure 2

0,5

On a : $e_+ = e_- = e(t)$ et $e_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t)$ ce qui permet d'écrire : $A_v = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$

3) La condition $A_v = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1$ correspond aux possibilités suivantes :

* 1^{ère} Possibilité :

R_1 infinie (circuit ouvert)
et R_2 quelconque.
Le circuit de la figure 2
devient (figure 2-a):

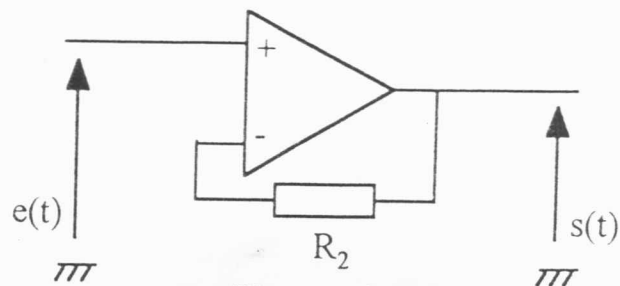


Figure 2-a

0,25

* 2^{ème} Possibilité :

R_1 quelconque
et $R_2 = 0$ (court-circuit).
Le circuit de la figure 2
devient (figure 2-b):

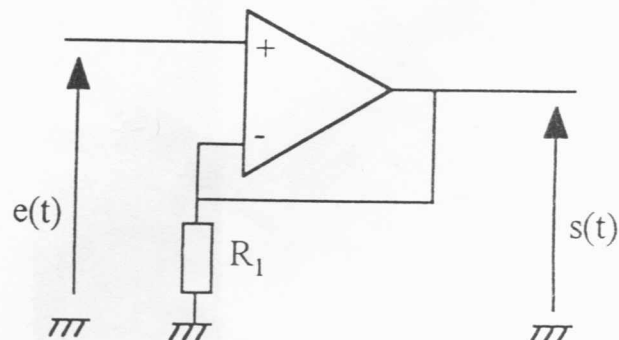


Figure 2-b

0,25

* 3^{ème} Possibilité :

A partir des deux cas
précédents on peut obtenir
une solution particulière pour
laquelle on a :

R_1 infinie (circuit ouvert)
et $R_2 = 0$ (court-circuit).

Le circuit de la figure 2
devient (figure 2-c):

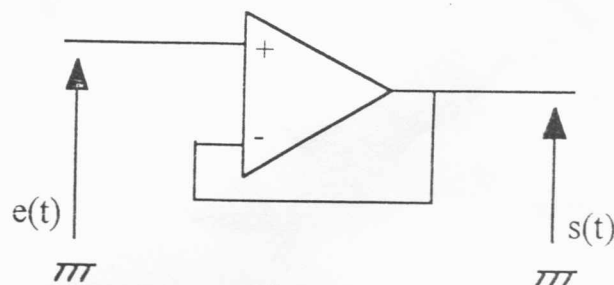


Figure 2-c

0,25

4) Parmi les possibilités trouvées en 3), le circuit qui nécessite le moins de composant est celui de la figure 2-c.

0,25

Ces 3 circuits sont des suiveurs de tension. Ils assurent une adaptation parfaite d'impédances pour les tensions (à leurs entrées et sorties).

B -

1) L'amplificateur opérationnel (de la figure 3-a) supposé idéal est monté en suiveur $A_v = \frac{s_1(t)}{v_1(t)} = 1$, il joue le rôle d'adaptateur parfait d'impédances pour les tensions (à son entrée et à sa sortie). La fonction de transfert du circuit global de la figure 3-a est :

$$\underline{H}_1(\omega) = \frac{s_1(t)}{v_1(t)} \frac{v_1(t)}{e_1(t)} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} \cdot 1$$

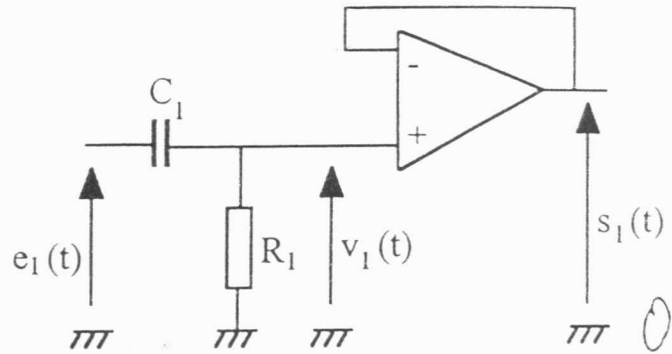


Figure 3-a

2) Le module de $\underline{H}_1(\omega)$ est

$$|\underline{H}_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R_1^2 C_1^2 \omega^2}}}$$

L'argument de $\underline{H}_1(\omega)$ est : $\phi_1(\omega) = 0 - \arctan \frac{1}{R_1 C_1 \omega} = \arctan \frac{1}{R_1 C_1 \omega}$

La pulsation de coupure ω_{c1} vérifie la relation :

$$|\underline{H}_1(\omega_{c1})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R_1^2 C_1^2 \omega_{c1}^2}}} = \frac{|\underline{H}_1|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

car $|\underline{H}_1|_{\max} \rightarrow 1$ pour $\omega \rightarrow \infty$

d'où $\omega_{c1} = \frac{1}{R_1 C_1}$

3) Tracés des diagrammes de Bode asymptotiques de $\underline{H}_1(\omega)$ (figure 3-b) :

$$G_1(\omega) = 20 \log (|\underline{H}_1(\omega)|) = -10 \log \left(1 + \frac{1}{R_1^2 C_1^2 \omega^2} \right) \text{ et } \phi_1(\omega)$$

$\omega = 0$	$ \underline{H}_1(0) \rightarrow 0$	$G_1(0) \rightarrow -\infty$	$\phi_1(\omega) = \frac{\pi}{2}$
$\omega = \omega_{c1}$	$ \underline{H}_1(\omega_{c1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_1(\omega_{c1}) = -3 \text{ dB}$	$\phi_1(\omega_{c1}) = \frac{\pi}{4}$
$\omega \rightarrow \infty$	$ \underline{H}_1(\infty) \rightarrow 1$	$G_1(\infty) \rightarrow 0 \text{ dB}$	$\phi_1(\infty) = 0$

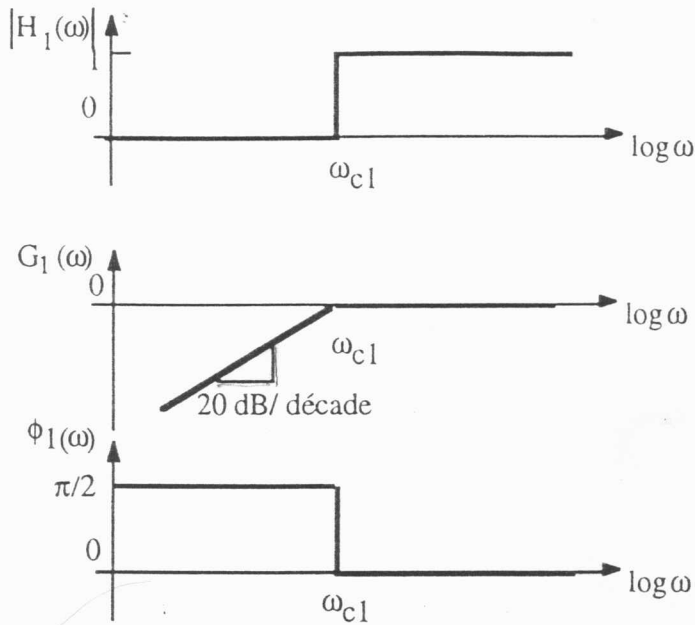


Figure 3-b

4) Ce circuit est un filtre passe-haut.

C.

1) L'amplificateur opérationnel (de la figure 4-a) supposé idéal est monté en suiveur $A_v = \frac{s_2(t)}{v_2(t)} = 1$, il joue le rôle d'adaptateur parfait d'impédances pour les tensions (à son entrée et à sa sortie). La fonction de transfert du circuit global de la figure 4-a est :

$$\underline{H}_2(\omega) = \frac{s_2(t)}{v_2(t)} \cdot \frac{v_2(t)}{e_2(t)} = \frac{1}{1 + j R_2 C_2 \omega} \cdot 1$$

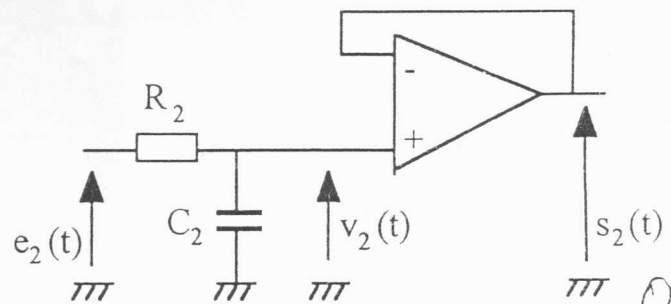


Figure 4-a

2) Le module de $\underline{H}_2(\omega)$ est $\boxed{|\underline{H}_2(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R_2^2 C_2^2 \omega^2}}}$

L'argument de $\underline{H}_2(\omega)$ est : $\phi_2(\omega) = -\arctan R_2 C_2 \omega$

La pulsation de coupure ω_{c2} vérifie la relation :

$$\boxed{|\underline{H}_2(\omega_{c2})| = \frac{1}{\sqrt{1 + R_2^2 C_2^2 \omega_{c2}^2}} = \frac{|\underline{H}_2|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

car $|\underline{H}_2|_{\max} \rightarrow 1$ pour $\omega \rightarrow 0$

d'où $\boxed{\omega_{c2} = \frac{1}{R_2 C_2}}$

3) Tracés des diagrammes de Bode asymptotiques de $\underline{H}_2(\omega)$ (figure :

$$G_2(\omega) = 20 \log(|\underline{H}_2(\omega)|) = -10 \log(1 + R_2^2 C_2^2 \omega^2) \text{ et } \phi_2(\omega)$$

$\omega = 0$	$ \underline{H}_2(0) = 1$	$G_2(0) = 0 \text{ dB}$	$\phi_2(\omega) = 0$
$\omega = \omega_{c2}$	$ \underline{H}_2(\omega_{c2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G_2(\omega_{c2}) = -3 \text{ dB}$	$\phi_2(\omega_{c1}) = -\frac{\pi}{4}$
$\omega \rightarrow \infty$	$ \underline{H}_2(\infty) \rightarrow 0$	$G_2(\infty) \rightarrow -\infty$	$\phi_2(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

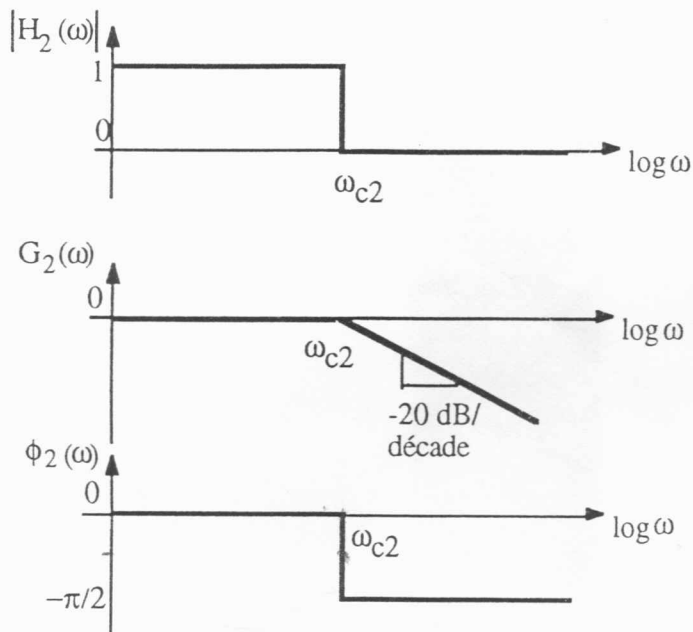


Figure 4-b

4) Ce circuit est un filtre passe-bas.

D)

1) Le premier suiveur à amplificateur opérationnel de la figure 5-a assure une adaptation parfaite d'impédances entre les deux circuits. La fonction de transfert du circuit résultant de la mise en cascade des deux circuits précédents sera égale au produit des fonctions de transferts étudiées en B) et C):

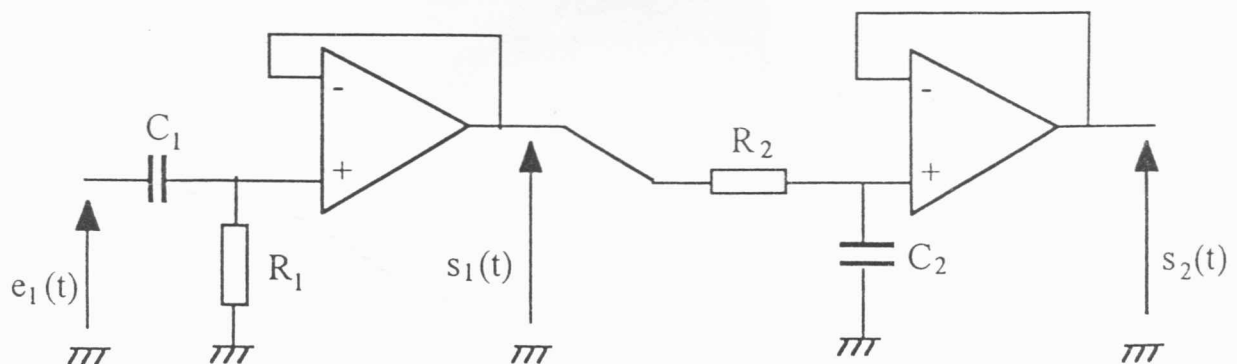


Figure 5-a

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}_2(t)}{\underline{s}_1(t)} \frac{\underline{s}_1(t)}{\underline{e}_1(t)} = \underline{H}_2(\omega) \underline{H}_1(\omega) = \frac{1}{1 + j R_2 C_2 \omega} \frac{1}{1 - j \frac{1}{R_1 C_1 \omega}}$$

0,25

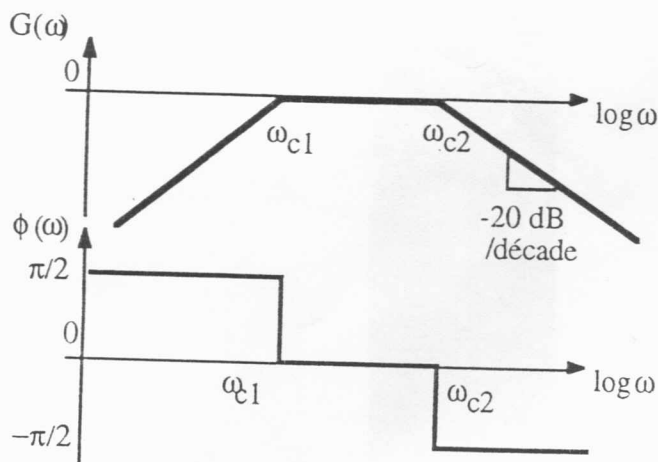
2) Tracés des diagrammes de Bode asymptotiques de $\underline{H}(\omega)$:

$$G(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)| = G_1(\omega) + G_2(\omega) = -10 \log \left(1 + \frac{1}{R_1^2 C_1^2 \omega^2} \right) - 10 \log \left(1 + R_2^2 C_2^2 \omega^2 \right)$$

$$\text{et } \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) = \arctan \frac{1}{R_1 C_1 \omega} - \arctan R_2 C_2 \omega$$

, 0,25

a) 1^{er} cas : $R_1 = 10 R_2$ et $C_1 = C_2$ ce qui correspond à $\omega_{c2} = 10 \omega_{c1}$
On peut considérer qu'on peut toujours faire la somme des gains et des arguments des tracés asymptotiques (figure 5-b)



0,25

Figure 5-b

Ce circuit est un filtre passe-bande.

b) 2^{ème} cas : $R_1 = R_2$ et $C_1 = C_2$ ce qui correspond à $\omega_{c2} = \omega_{c1}$
On peut considérer qu'on peut toujours faire la somme des gains et des arguments des tracés asymptotiques (figure 5-c)

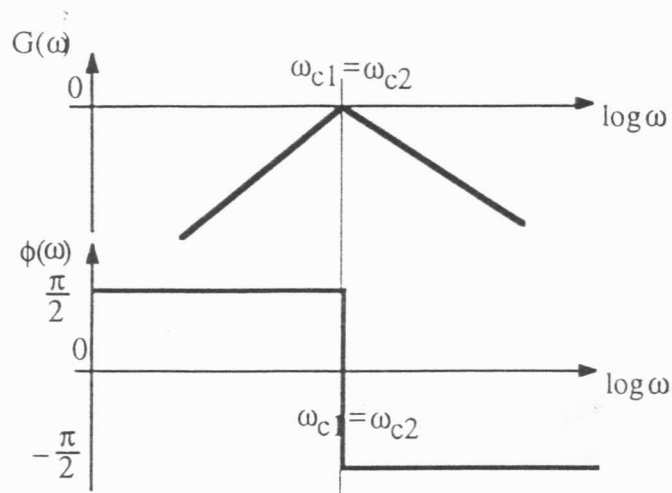


Figure 5-c

Ce circuit est un filtre sélectif (bande très réduite).

c) 3^{ème} cas : $10 R_1 = R_2$ et $C_1 = C_2$ ce qui correspond à $\omega_{c1} = 10 \omega_{c2}$

On peut considérer qu'on peut toujours faire la somme des gains et des arguments des tracés asymptotiques (figure 5-d)

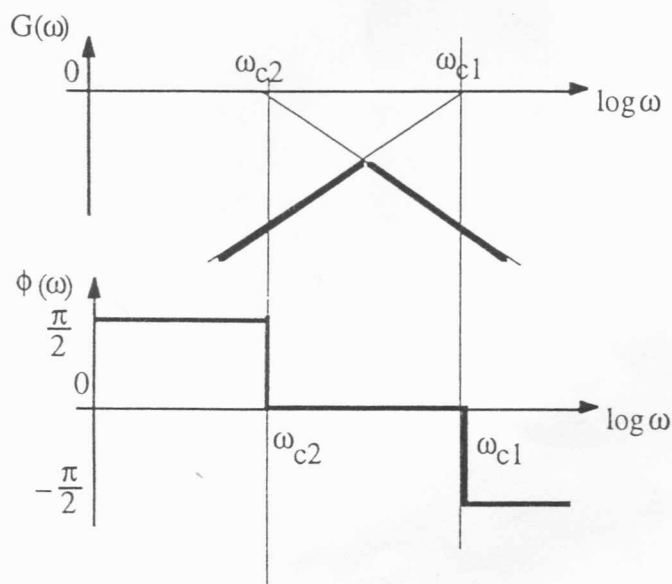


Figure 5-d

La fonction de transfert de ce circuit a un module inférieur à 1, c'est un atténuateur passe-bande.

ELECTROMAGNETISME



I- Conductivité statique

1. Principe fondamental:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

En régime permanent, la dérivée de $\vec{v}$ est nulle.

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$$

2. Conductivité:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}_0$$

D'où:

$$\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

3. Calcul de τ :

$$\tau = 5,33 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

4. a) Vitesse moyenne:

$$v = \frac{e\tau}{m} E_0$$

$$= 9,37 \text{ cm/s}$$

- b) Vitesse des électrons:

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$V_0 = 1,17 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

c) La vitesse moyenne v est très petite devant V_0 à cause des collisions, en effet, le trajet réel des électrons est constitué de segments de droites dirigés dans des directions quelconques et parcourus à la vitesse V_0 . En moyenne l'électron va avoir une vitesse $\vec{v}$ opposée à $\vec{E}_0$ et très faible.

II-Conducteur en régime sinusoïdal

A - Onde transmise :

1. Conductivité complexe:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

Le poids de l'électron est toujours négligeable. D'autre part, le module du champ magnétique étant de l'ordre de $\frac{E}{c}$ ce qui donne:

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

Il est donc légitime de négliger l'effet du champ magnétique par rapport à celui du champ électrique.

Le champ $\vec{E}$ est sinusoïdal $\vec{E} = \vec{E}' e^{-i\omega t}$, en régime permanent, la vitesse sera aussi sinusoïdale de même pulsation ω d'où:

$$-i m \omega \vec{v} = -e\vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

4. Calcul du champ magnétique:

La relation de Maxwell Faraday $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

D'où le champ magnétique transmis:

$$\vec{B}_t = B_{0t} \vec{y} \exp i \left[\left(\frac{1+i}{\delta} \right) z - \omega t \right]$$

$$\vec{B}_t = \frac{1+i}{\delta \omega} E_{0t} \vec{y} \exp i \left[\left(\frac{1+i}{\delta} \right) z - \omega t \right]$$

Jusque là nous ne pouvons rien dire à propos de $\vec{B}_t$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ et ce à cause de E_{0t} qui est nécessairement dépendant de ω , en effet, si E_{0t} est indépendant de ω alors l'amplitude de $\vec{B}_t$ tend vers l'infini lorsque ω tend vers zéro puisque $\frac{1}{\delta \omega}$ varie comme $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

B – coefficients de réflexion et de transmission :

1. a) Relations de continuité:

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{0}$$

Le milieu 1 est ici le vide et le milieu 2 est le conducteur. La détermination des champs magnétiques associés aux ondes incidente et réfléchie permet d'écrire:

$$\vec{B}_i = \frac{k_0}{\omega} E_{0i} \vec{y} \exp i(k_0 z - \omega t)$$

$$\vec{B}_r = -\frac{k_0}{\omega} E_{0r} \vec{y} \exp -i(k_0 z + \omega t)$$

Avec $k_0 = \frac{\omega}{c}$. Ce qui donne:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

$$\frac{1}{c} (E_{0i} - E_{0r}) = \frac{1}{\delta \omega} (1+i) E_{0t}$$

b) Coefficients de réflexion et de transmission:

$$t = \frac{2}{1 + \frac{c}{\delta \omega} (1+i)}$$

$$r = \frac{1 - \frac{c}{\delta \omega} (1+i)}{1 + \frac{c}{\delta \omega} (1+i)}$$

c) Dans le cas des faibles fréquences $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ alors $\frac{c}{\delta \omega} = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\omega \epsilon_0}} \gg 1$. Les coefficients de réflexion et de transmission se réduisent à:

$$t = \frac{2\delta \omega}{c} \left(\frac{1}{1+i} \right)$$

$$r = -1$$

2. Le module du champ transmis B_{0t} est:

$$B_{0t} = \frac{1+i}{\delta \omega} E_{0t}$$

$$B_{0t} = \frac{1+i}{\delta \omega} t E_{0i}$$

$$B_{0t} = \frac{2}{c} E_{0i}$$

Donc à très faible fréquence, le champ magnétique peut pénétrer à l'intérieur du volume du conducteur puisque son amplitude en $z=0$ est finie non nulle et l'épaisseur de peau devient très grande lorsque ω s'approche de zéro.

III- Supraconductivité

1. Dans un premier stade, nous supposons que les champs dépendent des coordonnées de temps et d'espace.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

$$\vec{J}_s = -n_s e \vec{v}$$

Donc:

$$\frac{d\vec{J}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}$$

En utilisant l'équation de Maxwell Faraday, il vient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{J}_s + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B} \right) = \vec{0}$$

2.

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \vec{\text{rot}} \left(\mu_0 \vec{J}_s + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$-\Delta \vec{B} = -\frac{\mu_0 n_s e^2}{m} \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Dans le cas d'un champ statique, cette relation donne:

$$\Delta \vec{B} - \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} \vec{B} = \vec{0}$$

3. a) Dans la cas présent, on a:

$$\frac{d^2 B_y(z)}{dz^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B_y(z)$$

Avec;

$$\frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m}$$

La solution de cette équation est la suivante:

$$B_y(z) = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda_L}\right)$$

b) Le champ B décroît en fonction de z ce qui prouve que le champ ne pénètre pas dans le volume du supraconducteur pour $T < T_c$, cependant lorsque T tend vers T_c , la densité n_s tend vers zéro et par suite λ_L tend vers l'infini.

c) On retrouve le fait que le champ B peut régner dans le volume du conducteur pour $T > T_c$. Voir conclusion de la question II-b-2. En effet dans le cas d'un champ statique, l'épaisseur de peau est infinie.

4. Calcul de la densité des super-électrons:

$$n_s = \frac{m}{\lambda_L^2 \mu_0 e^2}$$

$$n_s = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{9 \cdot 10^{-16} \cdot (1,6)^2 \cdot 10^{-38} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}$$

$$n_s = 3,14 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

On trouve alors que $n_s \approx n$, presque tous les électrons libres du plomb se transforment en

super-électrons.

5. La transformation $m' = 2m$; $e' = 2e$ et $n'_s = \frac{n_s}{2}$ doit laisser l'expression de λ_L invariante; en effet, la grandeur λ_L mesurable expérimentalement doit être évidemment indépendante du modèle théorique adopté pour l'expliquer.

BAREME DETAILLEE:

Partie I : ($1^\circ - 0.5 + 0.25$; $2^\circ - 0.5$; $3^\circ - 0.25$; $4^\circ - 0.75$) total : 2.25

Partie II-A : ($1^\circ - 0.25 + 0.25 + 1$; $2^\circ - 1 + 0.25$; $3^\circ - 1 + 0.25 + 0.25$; $4^\circ - 0.5 + 0.25$) total : 5

Partie II-B : ($1^\circ - 0.5 + 0.5 + 0.5$; $2^\circ - 0.5$) total : 2

Partie III : ($1^\circ - 1$; $2^\circ - 1.25$; $3^\circ - 0.5 + 0.25 + 0.25$; $4^\circ - 0.25$; $5^\circ - 0.25$) total : 3.75