



Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session : Juin 2000

Concours en Technologie
Epreuve de Physique

Durée : 4 Heures

Date : 7 juin 2000

Heure : 8h

Nb pages : 7

Barème : Problème 1 (13 points) ; Problème 2 (7 points)

l'usage d'une calculatrice (non-programmable) est autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve se compose de deux problèmes comportant chacun des parties largement **indépendantes** entre elles, les candidats peuvent les résoudre dans l'ordre qui leur convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

PROBLEME 1 : ELECTROMAGNETISME

Dans un matériau conducteur, les charges mobiles (les électrons) interagissent entre elles et avec les charges fixes du matériau; ces interactions sont alors décrites dans le cadre d'une théorie quantique. Cependant, une approche phénoménologique classique peut être adoptée pour expliquer la conductivité de ces matériaux. Cela consiste à traiter les électrons (de densité volumique n , de charge $-e$ et de masse m) comme des particules obéissant à la mécanique classique. On modélisera les collisions des électrons libres du conducteur avec le reste du matériau par une force de frottement visqueux $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ où τ est une constante de temps appelée durée de relaxation des vitesses et $\vec{v}$ représente la vitesse moyenne d'un électron.

Dans la suite du problème, on négligera le poids de l'électron par rapport aux forces électrique et magnétique qui lui seront appliquées.

I- Conductivité statique

Le conducteur est soumis à un champ électrique statique uniforme $\vec{E}_0$.

- 1- Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour un électron ; en déduire une relation entre la vitesse moyenne $\vec{v}$ des électrons et $\vec{E}_0$ lorsque le régime **permanent** est atteint.

2- Calculer la densité volumique de courant $\vec{j}_0$ qui s'établit dans le conducteur en fonction de $\vec{E}_0$ et déduire la conductivité statique γ_0 du conducteur en fonction de n , e , m et τ .

3- Le conducteur étudié est le plomb de conductivité $\gamma_0 = 4,8 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$; calculer τ .

On donne $n = 3,2 \cdot 10^{28} m^{-3}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$; $m = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$.

4- L'intensité du champ électrique appliqué au conducteur est égale à 100 Volt/m.

a) Calculer la vitesse moyenne v des électrons.

b) La vitesse V_0 d'un électron entre deux collisions peut être estimée en égalisant l'énergie cinétique de l'électron avec l'énergie thermique par particule $\frac{3}{2} k_B T$ où T est la température du conducteur et k_B est la constante de Boltzmann.

Calculer V_0 pour une température de 300K.

c) Comparer la valeur obtenue à celle de la vitesse moyenne v et commenter.

On donne $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Joule/K}$.

II- Conducteur en régime sinusoïdal

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, x, y, z) . Le conducteur précédent (de constantes électrique et magnétique ϵ_0, μ_0) occupe le demi-espace $z > 0$. On considère une onde plane progressive monochromatique polarisée suivant Ox , elle se propage vers les z croissants. Dans le demi-espace vide $z < 0$, le champ électrique de l'onde s'écrit comme suit :

$$\vec{E}_i = E_{0i} \vec{e}_x \exp(i(k_0 z - \omega t))$$

Cette onde subit une réflexion à l'interface vide conducteur et donne lieu à une onde réfléchie de champ $\vec{E}_r$ et une onde transmise de champ $\vec{E}_t$.

$$\vec{E}_r = E_{0r} \vec{e}_x \exp(-i(k_0 z + \omega t))$$

$$\vec{E}_t = E_{0t} \vec{e}_x \exp(i(kz - \omega t))$$

Où k_0 est la composante suivant z du vecteur d'onde dans le vide et k la composante complexe du vecteur d'onde dans le conducteur. Les amplitudes E_{0r} et E_{0t} peuvent alors être complexes.

A- Onde transmise :

Les électrons du plomb sont soumis à l'action des champs électrique et magnétique de l'onde transmise, il s'établit dans le conducteur un courant de densité volumique $\vec{j}$.

1- Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour un électron et montrer que l'action du champ magnétique sur l'électron est négligeable par rapport à celle du champ électrique. En déduire que la conductivité complexe en régime permanent est donné par :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 - i\omega\tau}$$

- 2- a) Ecrire les équations de Maxwell dans le conducteur et déduire la relation de dispersion $\underline{k}(\omega)$ de ce milieu.
- b) Comparer le rapport $\frac{\epsilon_0}{\gamma_0}$ à la valeur de τ calculée précédemment et montrer que la relation de dispersion du conducteur peut se simplifier dans le cas des "faibles fréquences" ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) pour donner :

$$\underline{k}^2 = i\omega\mu_0\gamma_0$$

$$\text{Données : } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI, } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s et } \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

On adopte l'approximation des "faibles fréquences" ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) dans le reste du problème.

- 3- a) Ecrire l'expression du champ électrique $\underline{E}_t$ de l'onde dans le conducteur.
En déduire la structure de l'onde correspondante.
On posera $\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma_0}{2}}$.
- b) Donner une interprétation physique à la quantité δ .
- c) Calculer δ pour $\omega = 10 \text{ rad/s}$.
- 4- Déterminer l'expression du champ magnétique de l'onde dans le conducteur, on écrira l'amplitude $\underline{B}_{0t}$ du champ magnétique en fonction de $\underline{E}_{0t}$. En se basant sur des considérations physiques, que peut-on dire de l'amplitude $\underline{E}_{0t}$ du champ électrique dans le conducteur lorsque la pulsation ω de l'onde tend vers zéro ?

B- coefficient de réflexion et de transmission

Les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ sont définis comme suit :

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}}$$

$$\underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}}$$

L'interface vide-conducteur ne porte aucune densité surfacique de courant.

- 1- a) Ecrire les relations de continuité des champs électrique et magnétique à l'interface vide-conducteur.
- b) En déduire les coefficients de réflexion et de transmission.
- c) Donner les expressions de ces coefficients pour ω très faible ($\omega \approx 0$).

- 2- Montrer que le champ magnétique peut pénétrer à l'intérieur du conducteur lorsque la pulsation ω est très faible.

III- Supraconductivité

Le plomb devient supraconducteur pour des températures inférieures à 7,9 K; sa conductivité devient infinie, on dit alors que le plomb subit une transition de phase conducteur-supraconducteur à $T_c = 7,9$ K. Pour expliquer ce phénomène, London a émis l'hypothèse de l'existence dans cette phase supraconductrice de particules appelées super-électrons (de masse m et de charge $-e$) qui se déplacent à l'intérieur du plomb sans subir les forces de frottement. La densité volumique des super-électrons n_s est donc nulle dans la phase conducteur du plomb et non nulle dans sa phase supraconductrice et tend vers zéro lorsque la température T tend vers T_c .

Le supraconducteur est plongé dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$; on négligera la force magnétique appliquée aux super-électrons par rapport à la force électrique.

- 1- Ecrire le principe fondamental de la dynamique pour un super-électron, en déduire que le supraconducteur est le siège d'un courant volumique de densité $\vec{J}_s$ obéissant à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{n_s e^2} \text{rot } \vec{J}_s + \vec{B} \right) = \vec{0} \quad (1)$$

- 2- La seconde hypothèse de London est que la quantité entre crochets de l'équation (1) est nulle. Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu supraconducteur. En déduire l'équation de propagation du champ magnétique $\vec{B}$. Montrer alors que le champ statique $\vec{B}$ vérifie l'équation :

$$\Delta \vec{B} - \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} \vec{B} = \vec{0} \quad (2)$$

- 3- Le plomb occupe toujours le demi-espace $z > 0$, un champ magnétique statique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$ règne dans le demi-espace $z < 0$.

- a) Montrer que la solution $B_y(z)$ de l'équation (2) est caractérisée par une longueur de pénétration λ_L dont on donnera l'expression en fonction de n_s , e , m et μ_0 .
b) Quelle valeur limite prend λ_L lorsque T approche T_c ?
c) Ce résultat vous semble-t-il conforme à la conclusion de la question II-B-2 ?

- 4- L'expérience montre que λ_L est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-8}$ m. Calculer la densité n_s des super-électrons, comparer la valeur obtenue à celle de n donnée en I-3.

- 5- La théorie quantique BCS de la supraconductivité est basée sur le fait que les porteurs de charges responsables de la supraconductivité sont des paires d'électrons de masse $2m$, de charge $-2e$ et de densité $\frac{n_s}{2}$. Montrer que l'expression de la longueur de pénétration λ_L est bien invariante par cette transformation.

PROBLEME 2 : ELECTRONIQUE

A-

On considère le circuit de la figure 1. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

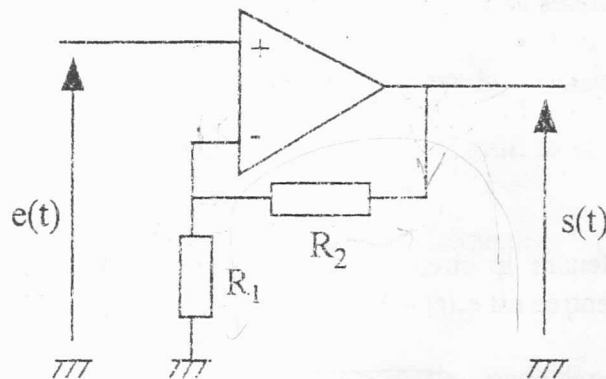


Figure 1

1- Donner les caractéristiques d'un amplificateur opérationnel idéal.

2- Calculer l'expression du coefficient d'amplification en tension $A_v = \frac{s(t)}{e(t)}$ du circuit de

la figure 1.

3- On souhaite avoir $A_v = 1$ (suiveur de tension), donner les différentes possibilités en précisant les valeurs de R_1 et R_2 dans chaque cas.

4- Parmi les possibilités trouvées en A-3, on choisit le cas particulier où le circuit du suiveur nécessite le minimum de composants.

Préciser dans ce cas les valeurs de R_1 et R_2 .

Donner alors le schéma du circuit correspondant.

Quelle sont les valeurs des impédances d'entrée Z_e et de sortie Z_s du circuit obtenu.

B-

On considère le circuit de la figure 2. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. Ce circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $e_1(t) = V_1 \sin \omega t$.

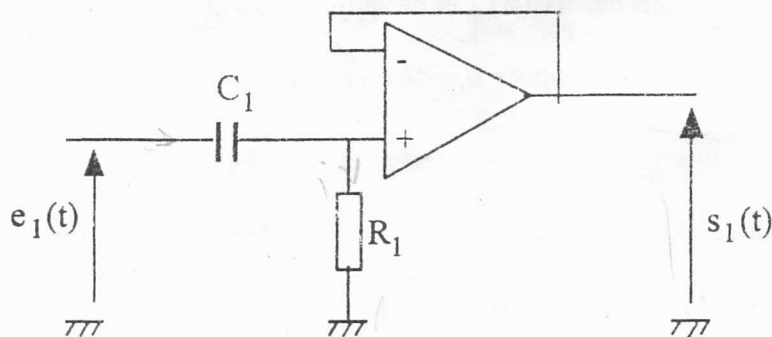


Figure 2

1- Déterminer l'expression de la fonction de transfert complexe $\underline{H}_1(\omega) = \frac{\underline{s}_1(\omega)}{\underline{e}_1(\omega)}$ de ce circuit, où $\underline{s}_1(\omega)$ et $\underline{e}_1(\omega)$ désignent respectivement les amplitudes complexes de $s_1(t)$ et de $e_1(t)$.

2- Calculer les expressions de $|\underline{H}_1(\omega)|$ et de $\varphi_1(\omega) = \text{Arg}\underline{H}_1(\omega)$.

En déduire la pulsation de coupure ω_{c1} de ce circuit.

3- Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de $\underline{H}_1(\omega)$:

$G_1(\omega) = 20\log |\underline{H}_1(\omega)|$ et $\varphi_1(\omega)$ en fonction de $\log \omega$.

4- Préciser la nature de ce filtre.

C-

On considère maintenant le circuit de la figure 3. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal. La tension d'entrée est $e_2(t) = V_2 \sin \omega t$.

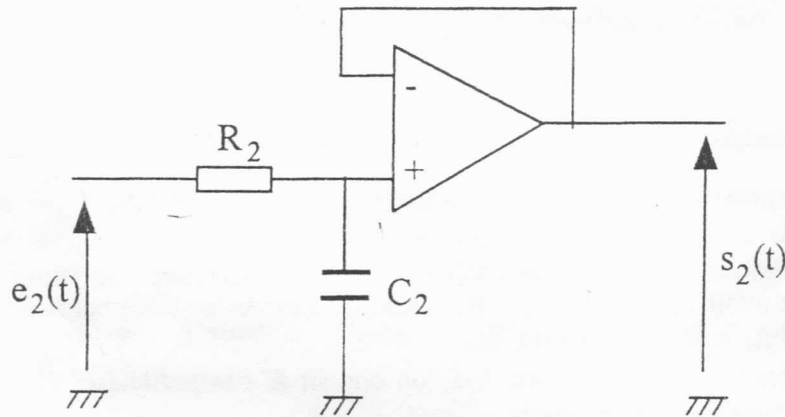


Figure 3

1- Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2(\omega) = \frac{\underline{s}_2(\omega)}{\underline{e}_2(\omega)}$ de ce circuit, où $\underline{s}_2(\omega)$ et $\underline{e}_2(\omega)$ désignent respectivement les amplitudes complexes de $s_2(t)$ et de $e_2(t)$.

2- Calculer les expressions de $|\underline{H}_2(\omega)|$ et de $\varphi_2(\omega) = \text{Arg}\underline{H}_2(\omega)$.

En déduire la pulsation de coupure ω_{c2} de ce circuit.

3- Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de $\underline{H}_2(\omega)$:

$G_2(\omega) = 20\log |\underline{H}_2(\omega)|$ et $\varphi_2(\omega)$ en fonction de $\log \omega$.

4- Préciser la nature de ce deuxième filtre.

D-

Le circuit de la figure 4 est obtenu en associant en cascade les circuits de la figure 2 et de la figure 3.

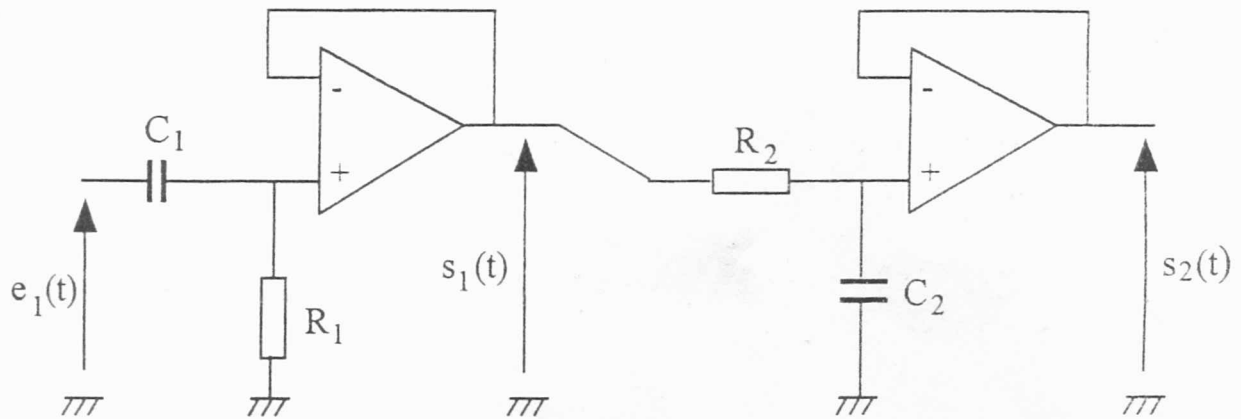


Figure 4

1- Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{s_2(\omega)}{e_1(\omega)}$ du circuit de la figure 4.

2- Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de $\underline{H}(\omega)$:

$G(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \text{Arg} \underline{H}(\omega)$ en fonction de $\log \omega$ dans les trois cas

suivants en précisant à chaque fois la fonction du circuit ainsi obtenu:

a) $R_1 = 10R_2$, $C_1 = C_2$,

b) $R_1 = R_2$, $C_1 = C_2$,

c) $R_1 = \frac{R_2}{10}$, $C_1 = C_2$.