

Exercice :

- 1) $x \mapsto P(x) \varphi(x) (1-x^2)^\alpha$ est continue sur $] -1, 1[$
 en plus, il existe $c \in \mathbb{R}^+$ / $\forall x \in] -1, 1[$.

$$|P(x) \varphi(x) (1-x^2)^\alpha| \leq c (1-x^2)^\alpha$$

$$\text{or } (1-x^2)^\alpha \underset{1}{\sim} 2^\alpha (1-x)^\alpha$$

$$(1-x^2)^\alpha \underset{-1}{\sim} 2^\alpha (1+x)^\alpha$$

donc $(1-x^2)^\alpha$ est intégrable sur $] -1, 1[$ pour tout $\alpha > -1$.
 donc $x \mapsto P(x) \varphi(x) (1-x^2)^\alpha$ est intégrable sur $] -1, 1[$.

$$2) \cdot (P, \varphi)_\alpha = \int_{-1}^1 P(x) \varphi(x) (1-x^2)^\alpha dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) P(x) (1-x^2)^\alpha dx = (\varphi, P)_\alpha$$

$$\cdot (d_1 P_1 + d_2 P_2, \varphi)_\alpha = \int_{-1}^1 (d_1 P_1 + d_2 P_2)(x) \varphi(x) (1-x^2)^\alpha dx = d_1 (P_1, \varphi)_\alpha + d_2 (P_2, \varphi)_\alpha$$

$$\cdot (P, P)_\alpha \geq 0 \text{ et } (P, P)_\alpha = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ sur }] -1, 1[\Rightarrow P \text{ est le polynôme nul.}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\partial^n}{\partial x^n} ((1-x^2)^{\alpha+n}) &= \frac{\partial^n}{\partial x^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\alpha+n}) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} (1-x)^{\alpha+n} \cdot \frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}} (1+x)^{\alpha+n} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots (\alpha+n-k+1) (-1)^k (1-x)^{\alpha+n-k} \cdot (\alpha+n)(\alpha+n-1) \dots (\alpha+n-n+k+1) (1+x)^{\alpha+n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+n) \dots (\alpha+n-k+1) (\alpha+n) \dots (\alpha+k+1) (-1)^k (1-x)^{\alpha+n-k} (1+x)^{\alpha+k} \\ &= (1-x^2)^\alpha \underbrace{\sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+n) \dots (\alpha+n-k+1) (\alpha+n) \dots (\alpha+k+1) (-1)^k (1-x)^{n-k} (1+x)^{n-k}}_{J_n^\alpha(x)} \end{aligned}$$

J_n^α est un polynôme de degré n

4)

$$(\mathcal{F}_n^\alpha, \mathcal{F}_m^\alpha)_\alpha = \int_{-1}^1 \mathcal{F}_n^\alpha(x) \mathcal{F}_m^\alpha(x) (1-x^2)^\alpha dx.$$

On a $n \neq m$ supposons que $n < m$.

$$(\mathcal{F}_n^\alpha, \mathcal{F}_m^\alpha)_\alpha = \int_{-1}^1 \mathcal{F}_n^\alpha(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} ((1-x^2)^{\alpha+m}) dx.$$

après une intégration par parties on trouve :

$$(\mathcal{F}_n^\alpha, \mathcal{F}_m^\alpha)_\alpha = - \int_{-1}^1 (\mathcal{F}_n^\alpha)'(x) \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} ((1-x^2)^{\alpha+m}) dx.$$

et après n intégration par parties on trouve :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_n^\alpha, \mathcal{F}_m^\alpha)_\alpha &= (-1)^n \int_{-1}^1 (\mathcal{F}_n^\alpha)^{(n)}(x) \frac{\partial^{m-n}}{\partial x^{m-n}} ((1-x^2)^{\alpha+m}) dx \\ &= (-1)^n (\mathcal{F}_n^\alpha)^{(n)} \int_{-1}^1 \frac{\partial^{m-n}}{\partial x^{m-n}} ((1-x^2)^{\alpha+m}) dx \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$5) \ a) \quad \mathcal{F}_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (\alpha+n) \dots (\alpha+n-k+1) (\alpha+n) \dots (\alpha+k+1) (-1)^k (1-x)^k (1+x)^{n-k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_n^\alpha(1) = (\alpha+n) \dots (\alpha+1) (-1)^n 2^n.$$

$$b) \quad \mathcal{F}_n^\alpha(x) = (1-x^2)^{-\alpha} \frac{\partial^n}{\partial x^n} ((1-x^2)^{\alpha+n})$$

$$x \mapsto (1-x^2)^{-\alpha} \text{ est paire}$$

$$x \mapsto \frac{\partial^n}{\partial x^n} ((1-x^2)^{\alpha+n}) \text{ est la dérivée } n^{\text{ème}} \text{ d'une fonction paire}$$

$$\text{or si } f \text{ est paire on a } f(-x) = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^n}{\partial x^n} (f(-x)) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x)$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(-x) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x)$$

d'où

$$\mathcal{F}_n^\alpha(-x) = (-1)^n \mathcal{F}_n^\alpha(x)$$

$$c) \quad \bar{J}_n^\alpha(-1) = (-1)^n \bar{J}_n^\alpha(1)$$

$$\text{si } n \text{ est paire : } \bar{J}_n^\alpha(-1) = \bar{J}_n^\alpha(1) = (\alpha+n) \dots (\alpha+1) 2^n$$

$$\text{si } n \text{ est impaire : } \bar{J}_n^\alpha(-1) = (-1)^n \bar{J}_n^\alpha(1) = (\alpha+n) \dots (\alpha+1) 2^n$$

6) a) A_α est linéaire

$$A_\alpha(P)(x) = -(1-x^2)^{-\alpha} \left(-2x(\alpha+1)(1-x^2)^{\alpha} \frac{\partial P}{\partial x} + (1-x^2)^{\alpha+1} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)$$

$$= 2x(1+\alpha) \frac{\partial P}{\partial x} - (1-x^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

Ainsi, si P est un polynôme de degré $\leq n$, alors

il en est de même pour $A_\alpha(P)$.

d'où A_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$b) \quad (A_\alpha(P), \varphi)_\alpha = - \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2)^{\alpha+1} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \cdot \varphi(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\alpha+1} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$$

$$= - \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2)^{\alpha+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$= (P, A_\alpha(\varphi))_\alpha$$

$$7) a) \quad A_\alpha(P) = dP$$

$$\Leftrightarrow 2x(1+\alpha) \frac{\partial P}{\partial x} - (1-x^2) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = dP$$

$$\Leftrightarrow (1-x^2) P'' - 2(\alpha+1)x P' + dP = 0$$

d'où P vérifie l'équation différentielle:

$$(1-x^2) y'' - 2(\alpha+1)x y' + d y = 0$$

b) soit $n \in \{0, \dots, N\}$, $d_n = n(n-1) + z(\alpha+1)n$

Montrons qu'il existe $\varphi \in (\mathbb{R}_N[x])^* / A_\alpha \varphi = d_n^\alpha \varphi$.

cherchons φ sous la forme $\varphi(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ avec $m \in \{0, \dots, N\}$

φ vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2) y'' + z(\alpha+1) x y'(x) + d_n^\alpha y = 0$$

Ceci donne

$$\begin{cases} (k+2)(k+1) a_{k+2} = (k(k-1) + z(\alpha+1)k - d_n^\alpha) a_k \\ 0 \leq k \leq m-2 \\ (- (m-1)(m-2) - z(\alpha+1)(m-1) + d_n^\alpha) a_{m-1} = 0 \\ (- (m)(m-1) - z(\alpha+1)m + d_n^\alpha) a_m = 0 \end{cases}$$

On choisit $m=n$, ceci impose $a_{n-1} = 0$

soit si n est pair,

on prend $a_1 = 0$ et $a_0 \neq 0$

la relation de récurrence fournit un élément $\varphi \in \mathbb{R}_n(x)$

non nul / $A_\alpha \varphi = d_n^\alpha \varphi$

si n est impair,

on prend $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$

et la relation de récurrence fournit un élément

$\varphi \in \mathbb{R}_n(x)$ non nul / $A_\alpha \varphi = d_n^\alpha \varphi$

donc d_n^α est une valeur propre de A_α .

g) Remarquons que $F_n^0(x) = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k (1-x)^{n-k} (1+x)^k$

$$\text{et } A_0(F_n^0) = - \frac{\partial}{\partial x} \left((1-x^2) \frac{\partial F_n^0}{\partial x} \right)$$

un calcul direct donne

$$A_0(F_n^0) = (n^2 + n) F_n^0 = d_n^0 F_n^0$$

donc F_n^0 est le vecteur propre associé à la valeur propre d_n^0 .

1) a) Prenons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$${}^t V U = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

$$A = U {}^t V = \left(u_i v_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$${}^t V U \neq 0 \Rightarrow \exists i / u_i v_i \neq 0 \Rightarrow A \neq 0$$

et un mineur d'ordre 2 de A est du type $\begin{vmatrix} u_i v_i & u_i v_j \\ u_\ell v_j & u_\ell v_i \end{vmatrix}$

$$\text{rg}(A) = 1.$$

$$i) \text{rg}(A) = 1 \Rightarrow \exists U \neq 0 /$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad AX \in \text{Vect}(U).$$

$$\Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \exists \alpha_X \in \mathbb{R} / AX = \alpha_X U$$

$$1) E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i^{\text{e}} \text{ ligne}$$

$$A E_i = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} e_{j1} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} e_{j2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} e_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = A_i$$

$$A E_i \Rightarrow \exists \alpha_i / A_i = A E_i = \alpha_i U.$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_i \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(u_i \alpha_j \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = A$$

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \text{tr}(A) \neq 0.$$

c) à partir de a) et b) on a l'équivalence :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle est de rang 1 $\Leftrightarrow \exists U, V / {}^t V U \neq 0$
et $A = U {}^t V$.

2) $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^t V U \neq 0$.

a) $\Psi(\alpha X + Y) = {}^t V(\alpha X + Y) = \alpha {}^t V X + {}^t V Y = \alpha \Psi(X) + \Psi(Y)$

donc Ψ est linéaire

b) $L = \text{Ker}(\Psi)$.

Ψ est une forme linéaire non nulle car $\Psi(U) \neq 0$
donc $\dim \text{Ker}(\Psi) = \dim(L) = n-1$.

c) on a ${}^t V U \neq 0 \Rightarrow U \notin L$

$\forall X \in L; AX = U {}^t V X$ or ${}^t V X = 0 \Rightarrow AX = 0$

d) $AU = U {}^t V U = {}^t V \cdot U \cdot U$

$\Rightarrow U$ est un vecteur propre associé à la valeur propre ${}^t V U$.

e) on a $\forall X \in L; AX = 0$;

$AU = {}^t V \cdot U \cdot U$

$\Rightarrow \text{sp}(A) = \{0, {}^t V U\}$

avec 0 est une valeur propre de multiplicité $n-1$

${}^t V U$ est une valeur propre simple

comme $\dim(L) = n-1$

A est alors diagonalisable et semblable

à la matrice $D \Rightarrow \exists P$ inversible / $A = P^{-1} D P$

f) $\det(I + A) = \det(I + P^{-1} D P)$

$= \det(P^{-1} (I + D) P) = \det(I + D) = 1 + {}^t V U$.

g) l'inverse de $I + A$ existe si $1 + {}^t V U \neq 0$.

d'autre part, on remarque que $A^2 = {}^t V U A$

donc $(I + A)(I + \alpha A) = (I + \alpha A)(I + A) = I \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{1 + {}^t V U}$

Partie 2

Question préliminaire :

• Soient $A \in S$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^tXX = {}^tYY = 1$ et ${}^tXY = 0$.

$${}^tXAY = {}^tX {}^tAY = {}^t({}^tYAX)$$

$$\text{or } {}^tYAX \in \mathbb{R} \Rightarrow {}^t({}^tYAX) = {}^tYAX$$

$$\text{donc } {}^tXAY = {}^tYAX$$

$$\Rightarrow S \subset \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tXAY = {}^tYAX ; \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0 \right\}$$

• soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant,

$${}^tXAY = {}^tYAX, \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0.$$

choisissons $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow i^{\text{e}} \text{ ligne}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow j^{\text{e}} \text{ ligne}$

avec $i \neq j$.

$$\text{ma alors } {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0$$

$$\text{et si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{alors } {}^tXAY = a_{ij} \quad \text{et } {}^tYAX = a_{ji}$$

donc pour tout $i, j / i \neq j$ ma $a_{ij} = a_{ji}$

$$\text{Ainsi } {}^tA = A$$

$$\text{donc l'égalité } S = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tXAY = {}^tYAX, \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0 \right\}$$

$$\text{A/ 1) } \langle A, B \rangle = {}^t(A^tB) = {}^t(B^tA) = \langle B, A \rangle$$

$$\langle \alpha A_1 + A_2, B \rangle = {}^t((\alpha A_1 + A_2)^tB) = \alpha {}^t(A_1^tB) + {}^t(A_2^tB)$$

$$= \alpha \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$$

$$\langle A, A \rangle = {}^t(A^tA)$$

$$A^t A = (c_{ij}) \quad / \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ik})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle A, A \rangle \geq 0$$

$$\bullet \langle A, A \rangle = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ik})^2 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad a_{ik} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Donc $\langle, \rangle$ est un produit scalaire.

a) $A \in S^+ \Rightarrow A$ est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ avec $d_i \geq 0$.

$$\Rightarrow \text{tr}(A) = d_1 + \dots + d_n$$

$$\text{et } \text{tr}(A^2) = d_1^2 + \dots + d_n^2$$

$$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \text{tr}(A^t A) = \text{tr}(A^2) = d_1^2 + \dots + d_n^2$$

$$\text{Comme } d_i \geq 0, \text{ on a } (d_1 + \dots + d_n)^2 \geq d_1^2 + \dots + d_n^2$$

$$\Rightarrow \|A\|^2 \leq (\text{tr}(A))^2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \|A\|^2 &= \langle A, A \rangle = \text{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2$$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \sum_{k=1}^n b_{kj}^2$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{lj}^2 \right)$$

$$\leq \|A\|^2 \|B\|^2$$

$$\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$3) \|U^t V\|^2 = \langle U^t V, U^t V \rangle = \text{tr}(U^t V \cdot V^t U)$$

$$= {}^t V V \text{tr}(U^t U)$$

$$= {}^t V V \cdot {}^t U \cdot U$$

$$\Rightarrow \|U^t V\| = \sqrt{{}^t V V} \cdot \sqrt{{}^t U U}$$

$$4) \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B) = -\text{tr}(AB)$$

$$\langle B, A \rangle = \text{tr}(B^t A) = \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB)$$

$$\text{or } \langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle \Rightarrow \text{tr}(AB) = -\text{tr}(AB) \Rightarrow \text{tr}(AB) = 0 \Rightarrow \langle A, B \rangle = 0$$

3/

1) On note que :

$$(X^t X + Y^t Y)(X^t X + Y^t Y) = X^t X + Y^t Y$$

$$(X^t Y - Y^t X)(X^t Y - Y^t X) = -X^t X - Y^t Y$$

$$(X^t X + Y^t Y)(X^t Y - Y^t X) = X^t Y - Y^t X$$

$$(X^t Y - Y^t X)(X^t X + Y^t Y) = X^t Y - Y^t X$$

Puis un calcul direct de $Q(\alpha)$ $Q(-\alpha)$ donne le résultat

$$2) {}^t Q(\alpha) = I - 2 \sin^2(\alpha)(X^t X + Y^t Y) + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)(Y^t X - X^t Y)$$

$$= Q(-\alpha)$$

$$\text{or } Q(\alpha) Q(-\alpha) = I \Rightarrow {}^t Q(\alpha) Q(\alpha) = I$$

$$\Rightarrow Q(\alpha) \in O(n)$$

$$P = I - 2 X^t X$$

$${}^t P \cdot P = (I - 2 X^t X)(I - 2 X^t X) = I - 4 X^t X + 4 X^t X X^t X$$

$$\text{or } X^t X = 1 \Rightarrow {}^t P P = I$$

$$3) \quad \langle A, \Omega \rangle \leq \langle A, I \rangle, \quad \forall \Omega \in \mathcal{O}(n).$$

$$a) \quad \langle A, V^t W \rangle = \text{tr}(A W^t V) \\ = {}^t V A W$$

$$b) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\alpha) \in \mathcal{O}(n)$$

$$\Rightarrow \langle A, \Phi(\alpha) \rangle \leq \langle A, I \rangle$$

$$\Rightarrow \langle A, \Phi(\alpha) - I \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow -2 \sin^2(\alpha) \langle A, X^t X + Y^t Y \rangle + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \langle A, X^t Y - Y^t X \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow -2 \sin^2(\alpha) ({}^t X A X + {}^t Y A Y) + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) ({}^t X A Y - {}^t Y A X) \leq 0$$

$$c) \quad \forall \alpha \in]0, \pi[,$$

$$- ({}^t X A X + {}^t Y A Y) + \cotg(\alpha) ({}^t X A Y - {}^t Y A X) \leq 0$$

Puisque $\cotg(\alpha)$ décrit $\mathbb{R}$ quand α décrit $]0, \pi[$.

on a nécessairement ${}^t X A Y - {}^t Y A X = 0$.

d'où on a alors : ${}^t X A Y = {}^t Y A X, \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) /$

$${}^t X X = {}^t Y Y = 1 \quad \text{et} \quad {}^t X \cdot Y = 0$$

question
préliminaire

$$A \in S$$

$$d) \quad P \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow \langle A, P \rangle \leq \langle A, I \rangle$$

$$\Rightarrow \langle A, P - I \rangle \leq 0.$$

$$\langle A, P - I \rangle \leq 0 \Rightarrow -2 \langle A, {}^t X X \rangle \leq 0$$

$$\Rightarrow {}^t X A X \geq 0$$

d'où $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / {}^t X X = 1$, on a ${}^t X A X \geq 0$.

$$\Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t X A X \geq 0$$

et comme $A \in S$, on obtient $A \in S^+$.

$$4) \quad A \in S^+, \quad \mathcal{R} \in \mathcal{O}(n).$$

$$\begin{aligned} a) \quad - {}^t(\mathcal{R} - I)(\mathcal{R} - I) &= -({}^t\mathcal{R} - I)(\mathcal{R} - I) \\ &= - {}^t\mathcal{R}\mathcal{R} + {}^t\mathcal{R} + \mathcal{R} - I \\ &= \mathcal{R} + {}^t\mathcal{R} - 2I \quad (\text{car } {}^t\mathcal{R}\mathcal{R} = I) \end{aligned}$$

$$b) \quad 2C = \mathcal{R} + {}^t\mathcal{R} - 2I$$

$$\begin{aligned} 2 \langle A, C \rangle &= \langle A, 2C \rangle = \langle A, \mathcal{R} + {}^t\mathcal{R} - 2I \rangle \\ &= \langle A, \mathcal{R} - I \rangle + \langle A, {}^t\mathcal{R} - I \rangle \\ &= \langle A, \mathcal{R} - I \rangle + \text{tr}(A(\mathcal{R} - I)) \\ &= \langle A, \mathcal{R} - I \rangle + \text{tr}((\mathcal{R} - I) {}^tA) \\ &= \langle A, \mathcal{R} - I \rangle + \langle \mathcal{R} - I, A \rangle \\ &= 2 \langle A, \mathcal{R} - I \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle A, C \rangle = \langle A, \mathcal{R} - I \rangle$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2 \langle A, \mathcal{R} - I \rangle &= \langle A, 2C \rangle = - \langle A, {}^t(\mathcal{R} - I)(\mathcal{R} - I) \rangle \\ &= - \text{tr}(A {}^t(\mathcal{R} - I)(\mathcal{R} - I)) \\ &= - \text{tr}((\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad {}^t((\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I)) &= (\mathcal{R} - I) {}^tA {}^t({}^t(\mathcal{R} - I)) \\ &= (\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I) \in S$$

$${}^tX (\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I) X = {}^t \left({}^t(\mathcal{R} - I) X \right) A \left({}^t(\mathcal{R} - I) X \right) \geq 0$$

$$\text{car } A \in S^+$$

$$\text{donc } (\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I) \in S^+$$

$$\begin{aligned} d) \quad (\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I) \in S^+ &\Rightarrow \text{tr}((\mathcal{R} - I) A {}^t(\mathcal{R} - I)) \geq 0 \\ \Rightarrow \langle A, \mathcal{R} - I \rangle \leq 0 &\Rightarrow \langle A, \mathcal{R} \rangle \leq \langle A, I \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \text{la question 4)} &\Rightarrow S^+ \subset \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathcal{O}(n)} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \langle A, \mathcal{R} \rangle \leq \langle A, I \rangle\} \\ \text{la question 3)} &\Rightarrow \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathcal{O}(n)} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \langle A, \mathcal{R} \rangle \leq \langle A, I \rangle\} \subset S^+ \\ &\text{donc l'égalité.} \end{aligned}$$

6) a) Ψ est linéaire sur des espaces de dimension finie
donc Ψ est continue

$$b) \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle A, \alpha \rangle \leq \langle A, I \rangle\} = \Psi^{-1}([-\infty, 0])$$

c'est donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue, donc c'est un fermé.

c) S^+ est l'intersection quelconque de fermés donc c'est un fermé.

d) Soit $A \neq 0$; $A \in S^+$.

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, tA \in S^+$$

$$\|tA\| = t\|A\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$\Rightarrow S^+$ est non borné

$\Rightarrow S^+$ est non compact.