



Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session : Juin 2003

Concours en Technologie
Epreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures	Date : 6 Juin 2003	Heure : 8 H	Nb pages : 4
Barème :	Problème 1 : 10 pts	Problème 2 : 10 pts	

*Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.*

Problème 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour $t \geq 0$, $f_n(t) = \frac{1}{(cht)^{n+1}}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On pose

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(cht)^{n+1}} dt$$

sa valeur .

2) Calculer a_0 et a_1 . Vérifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3) a) Etablir, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$ les inégalités

$$1 + \frac{n+1}{2}t^2 \leq (cht)^{n+1} \leq e^{(n+1)t}.$$

b) En déduire

i) l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}$;

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

4) Montrer la relation de récurrence entre a_n et a_{n+2} suivante :

$$\forall n \geq 0, (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n.$$

En déduire, suivant la parité de n , l'expression de a_n .

5) a) Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R = 1$ et qu'elle converge en $x = -1$.

On pose

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, x \in [-1, 1[.$$

b) Montrer que g vérifie

$$(1-x^2)g'(x) - xg(x) = 1 \text{ si } |x| < 1$$

et que

$$g(0) = a_0.$$

6) a) Trouver l'expression sur $] -1, 1[$ de g à l'aide de fonctions usuelles.

b) En considérant la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{2}(g(x) - g(-x))$, donner le développement en série entière de $(\arcsin x)^2$.

7) On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht - x}.$$

a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[$.

b) Prouver que, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in] -\infty, 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{cht - x} - x^{N+1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(cht)^{N+1}} \frac{1}{cht - x} dt$$

c) Comparer $f(x)$ et $g(x)$, pour $|x| < 1$.

d) Montrer que $g(-1) = 1$.

Problème 2

On définit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynômes de la façon suivante :

- pour tout nombre réel x ,

$$f_0(x) = 1 \text{ et } f_1(x) = x$$

- pour tout nombre entier naturel n non nul et pour tout nombre réel x ,

$$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Soit m un nombre entier naturel. On désigne par E_m l'ensemble constitué des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à m .

Partie 1

- 1) Calculer $f_n(1)$, pour tout nombre entier n .
- 2) Montrer que :
 - a) Pour tout nombre entier naturel n non nul, f_n est une fonction polynôme de degré n , dont le coefficient du terme de plus haut degré est 2^{n-1} .
 - b) Pour tout nombre entier naturel n et pour tout réel x , $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$.
- 3) Dédire de la question précédente, suivant la valeur de n , la parité de f_n et la valeur de $f_n(-1)$.
- 4) Montrer que la famille $\{f_0, f_1, \dots, f_m\}$ est une base de l'espace E_m .

Partie 2

- 1) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel θ , $f_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
- 2) Soit n un nombre entier naturel non nul.
 - a) Résoudre, dans l'intervalle $]0, \pi[$, l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnue θ .
En déduire les solutions appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$ de l'équation $f_n(x) = 0$.
 - b) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue x .

Partie 3

Soit f un élément de E_m , tel que $f(-1) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$.

1) a) Donner un équivalent de $\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, quand t tend vers 1 par valeurs inférieures à 1.

b) Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ et $\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ existent.

2) Pour tout nombres entiers naturels p et q , on pose :

$$S_{(p,q)} = \int_{-1}^1 \frac{f_p(t)f_q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

a) Justifier l'existence de $S_{(p,q)}$.

b) Montrer que, pour tout nombres entiers naturels p et q ,

$$S_{(p,q)} = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta.$$

En déduire la valeur de $S_{(p,q)}$, suivant les valeurs des nombres entiers naturels p et q .

c) Montrer que $\int_{-1}^1 \frac{f_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi$ et que, si n est non nul, $\int_{-1}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0$

3) a) On sait, d'après, Partie 1 question 4), qu'il existe un unique élément $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^{n+1}$, tel que

$$f = \sum_{n=0}^{n=m} \alpha_n f_n.$$

Exprimer $\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ en fonction de α_0 .

b) Calculer $\int_{-1}^1 \frac{t^3 + t^2 + t - 1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.