

Concours Technologie
Epreuve de Mathématiques



Date : Lundi 07 Juin 2004 Heure : 8 H Durée : 4 H Nb pages : 4
Barème : Pb 1 (9 pts) ; Pb 2 (I : 4,5 pts, II - A : 1,5 pts, II - B : 5 pts)

L'usage des calculatrices est strictement interdit.
Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation. Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le sujet peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Problème 1.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $I_m = \int_0^\pi (\cos t)^m dt$.

1. a- Calculer I_0 et I_1 .
- b- Etablir une relation entre I_{m+2} et I_m pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- c- Donner la valeur de I_{2m+1} .
- d- Donner la valeur de I_{2m} en fonction du coefficient binomial C_{2m}^m .

On considère l'espace préhilbertien $E = C([0, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs réelles, muni du produit scalaire $\langle , \rangle$ défini par

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t)g(t)dt \quad \forall f, g \in E.$$

On considère deux suites (e_k) et (v_k) d'éléments de E définies par

$$e_0 = 1, e_k(t) = \sqrt{2} \cos(kt), k \in \mathbb{N}^*,$$

$$v_0 = 1, v_k(t) = \cos^k t, k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par H_m le sous espace vectoriel engendré par $(e_0, \dots, e_m)$.

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(e_0, \dots, e_m)$ est une base orthonormée de H_m .

3. a- Ecrire v_2 et v_3 en fonction de e_0, e_1, e_2 et e_3 .

b- Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $v_m = \sum_{k=0}^m q_{k,m} e_k$.

c- Donner l'expression de $q_{k,m}$, pour tout $0 \leq k \leq m$.

d- Montrer que $(v_0, \dots, v_m)$ est une base de H_m .

4. On désigne par Q_{m+1} la matrice de passage de la base $(e_0, \dots, e_m)$ à la base $(v_0, \dots, v_m)$.

Calculer $\det Q_{m+1}$.

5. On désigne par $W_{m+1} = (a_{i,j})_{0 \leq i, j \leq m}$ la matrice telle que

$$\begin{cases} a_{i,j} = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m & \text{si } i+j = 2m \\ a_{i,j} = 0 & \text{si } i+j = 2m+1 \end{cases}$$

Calculer $\det W_{m+1}$.

Problème 2.

Partie I

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $u_n(\lambda) = \int_0^\pi \cos(\lambda x) \cos(nx) dx$.

1. Montrer que $u_n(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda \sin(\lambda \pi)}{n^2 + \lambda^2}$ et en déduire que la série de terme général $u_n(\lambda)$ est convergente.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

a) Calculer $\int_0^\pi D_n(x) dx$.

b) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

où $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Soit φ l'application définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi(x) = ch(\lambda x) - 1$.

Montrer la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^n u_k(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi(x) D_n(x) dx.$$

4. a) Montrer que la fonction $x \mapsto \Phi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(x) D_n(x) dx = 0.$$

5. A l'aide des résultats précédents, montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\pi}{sh(\lambda\pi)} - \frac{1}{\lambda} \right).$$

6. Calculer les sommes des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9n^2 + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4}.$$

Partie II

-A-

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On considère l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$y''(x) - \lambda^2 y(x) = \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que toute solution réelle de cette équation est de la forme

$$y(x) = \alpha ch(\lambda x) + \beta sh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. En déduire la solution **paire** de cette équation vérifiant $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

-B-

1. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

2. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2 + \lambda^2)} \cos(nx) \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx).$$

- a) Montrer que h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a pour tout réel x ,

$$h''(x) = f(x).$$

- b) Vérifier que $\frac{\lambda^2}{n^2(n^2 + \lambda^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + \lambda^2}$.

- c) En déduire que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \lambda^2 h(x).$$

4. Montrer que la fonction f est de classe C^2 sur $[-\pi, \pi]$, paire et qu'elle est solution de l'équation différentielle : $y''(x) - \lambda^2 y(x) = \frac{1}{2}$ avec $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

5. Montrer que pour $x \in [-\pi, \pi]$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx) = \frac{\pi \operatorname{ch}(\lambda x)}{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda \pi)} - \frac{1}{2\lambda^2}.$$

6. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + \lambda^2} \sin(nx) = \frac{\pi \operatorname{sh}(\lambda x)}{2 \operatorname{sh}(\lambda \pi)}.$$