



Concours en Technologie
Epreuve de Physique

Date : Jeudi 10 juin 2004 Heure : 8 H Durée : 4 H Nb pages : 7
Barème : 1^{ère} Partie : 2,5 pts ; 2^{ème} Partie : 6 pts ; 3^{ème} Partie : 5,5 pts ; 4^{ème} Partie : 6 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le problème comporte quatre parties.

Le candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

PROBLEME: Rayonnement d'une molécule soumise à une onde électromagnétique et radar à balayage électronique

On rapporte l'espace à un système d'axes (Ox, Oy, Oz) de base orthonormée directe ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$).

Le milieu vide de charge et de courant est caractérisé par sa permittivité électrique ϵ_0 et sa perméabilité magnétique μ_0 . La célérité de la lumière dans le vide est $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

PREMIERE PARTIE : Action d'une onde électromagnétique sur la molécule de monoxyde de carbone

On considère la molécule linéaire de monoxyde de carbone, qu'on modélise par deux points matériels de masses m_o et m_c reliés par un ressort de raideur k et de longueur à vide a .

A cause de la différence d'électronégativité entre l'atome d'oxygène et l'atome de carbone, il apparaît sur l'atome d'oxygène la charge $(-\delta e)$ et sur l'atome de carbone la charge (δe) , avec e la charge élémentaire et δ une constante positive inférieure à 1.

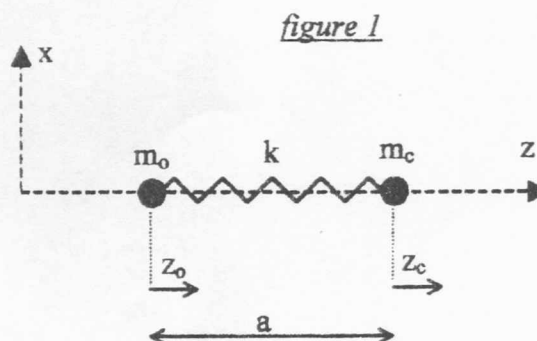
On envoie sur la molécule, alignée dans la direction (Oz), une onde électromagnétique plane progressive monochromatique, de pulsation ω et de longueur d'onde λ . L'onde, polarisée rectilignement suivant l'axe (Oz), se propage suivant l'axe (Ox).

Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \vec{u}_z, \text{ où } E_0 \text{ est une}$$

constante réelle positive.

On désigne par $z_o(t)$ et $z_c(t)$ les déplacements respectifs des atomes d'oxygène et de carbone par rapport à leurs positions d'équilibre (figure 1).



- 1.a. Montrer que dans le cas où les vitesses de déplacement des atomes sont négligeables devant la célérité de la lumière c , l'action du champ magnétique de l'onde incidente est négligeable devant celle du champ électrique.
- 1.b. Sachant que la longueur d'onde λ est supérieure à $0,4 \mu\text{m}$, justifier qu'on peut considérer que le champ électrique de l'onde est uniforme à l'échelle moléculaire : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

Dans la suite, on supposera que ces deux conditions sont réalisées.

2.a. En négligeant les interactions intermoléculaires ainsi que l'action de pesanteur, écrire dans le référentiel $R(O, x, y, z)$, supposé galiléen, les équations différentielles vérifiées par les déplacements $z_o(t)$ et $z_c(t)$.

2.b. En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $u(t) = z_c(t) - z_o(t)$ s'écrit :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \frac{\delta e}{\mu} E_0 \cos(\omega t), \text{ avec } \mu = \frac{m_o m_c}{m_o + m_c} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{k}{\mu}.$$

2.c. Résoudre cette équation en régime sinusoïdal forcé.

2.d. Montrer que le vecteur moment dipolaire $\vec{P}$ de la molécule s'écrit : $\vec{P} = [P_0 + P_{0i} \cos(\omega t)] \vec{u}_z$, avec

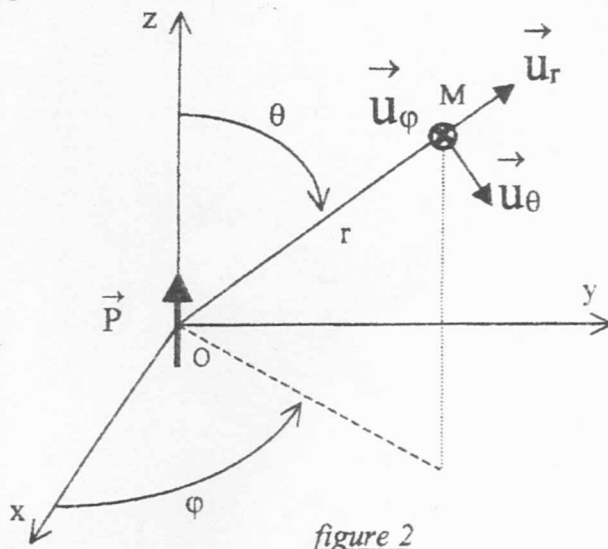
$$P_0 = \delta e a \text{ et } P_{0i} = \frac{\delta^2 e^2 E_0}{\mu(\omega_0^2 - \omega^2)}. \text{ Interpréter chaque terme.}$$

DEUXIEME PARTIE : Rayonnement dipolaire

On s'intéresse, dans cette partie, au rayonnement dipolaire émis par la molécule de monoxyde de carbone dotée du moment dipolaire $\vec{P} = [P_0 + P_{0i} \cos(\omega t)] \vec{u}_z$, déterminé précédemment (question 2.d de la première partie).

On admet que le potentiel scalaire créé par cette molécule, placée en O , en un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) tel que $r = OM \gg a$ (figure 2), s'écrit, en notation complexe :

$$\underline{V}(M, t) = \frac{\cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \left\{ P_0 + P_{0i} \left(1 + j \frac{\omega}{c} r \right) e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} \right\}.$$



1. Simplifier et commenter les expressions du potentiel scalaire $\underline{V}$ dans les cas suivants :
 - molécule isolée (non soumise à une onde incidente)
 - molécule soumise à l'action d'un champ électrostatique : $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$
 - molécule soumise à l'action de l'onde incidente de longueur d'onde λ avec $r \ll \lambda$
 - molécule soumise à l'action de l'onde incidente avec $r \gg \lambda$
2. Ecrire les relations permettant de déterminer :
 - le potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ à partir du potentiel scalaire $V(M, t)$.
 - les champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$ à partir des potentiels scalaire $V(M, t)$ et vecteur $\vec{A}(M, t)$.

On admet, dans la suite, les expressions suivantes pour les champs électrique et magnétique :

$$\vec{E}(M,t) = \begin{cases} E_r = \frac{2 \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left\{ P_0 + P_{0i} \left(1 + j \frac{\omega}{c} r \right) e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} \right\} \\ E_\theta = \frac{\sin \theta}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left\{ P_0 + P_{0i} \left(1 + j \frac{\omega}{c} r - \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \right) e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} \right\} \\ E_\phi = 0 \end{cases}$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4 \pi} \frac{j\omega}{r^2} \left\{ P_{0i} \left(1 + j \frac{\omega}{c} r \right) e^{j\omega \left(t - \frac{r}{c} \right)} \right\} \vec{u}_\phi.$$

3. Par des considérations de symétrie, justifier les directions des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
4. Que deviennent les expressions de $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ pour des champs proches ($r \ll \lambda$) ?
Même question pour des champs lointains ($r \gg \lambda$).

Dans la suite, on se placera dans la zone des champs lointains ou zone de rayonnement ($r \gg \lambda$).

5. Justifier l'affirmation suivante : « le modèle de l'onde électromagnétique plane progressive monochromatique décrit, localement, la structure de l'onde rayonnée, à grande distance ($r \gg \lambda$), par un dipôle oscillant ».
6. Déterminer, en fonction de ω , P_{0i} , ϵ_0 , c , r , t et θ , l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ ainsi que sa moyenne dans le temps $\langle \vec{R} \rangle$.
7. L'intensité d'une onde électromagnétique, notée I , est la puissance surfacique moyenne que reçoit un détecteur plan placé perpendiculairement à la direction de propagation.

Vérifier que $I = \langle \vec{R} \rangle$.

Tracer l'allure du diagramme **polaire** de rayonnement $I(\theta)$. On posera $I(r, \theta = \pi/2) = I_0$.

Conclure sur la directivité du rayonnement.

8. Montrer que la puissance électromagnétique moyenne P_m rayonnée par la molécule dans tout l'espace, c'est à dire à travers une sphère de centre O et rayon r , s'écrit : $P_m = \frac{1}{12\pi} \frac{P_{0i}^2 \omega^4}{\epsilon_0 c^3}$.

Interpréter le fait que la puissance P_m ne dépend pas de r .

9. En traçant l'allure de la courbe donnant P_m en fonction de ω , dire pourquoi le modèle décrivant les oscillations de la molécule de monoxyde de carbone n'est pas acceptable pour $\omega = \omega_0$.

On rappelle que $P_{0i} = \frac{\delta^2 e^2 E_0}{\mu(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Préciser le phénomène physique qui n'est pas pris en compte.

10. On admet que la puissance rayonnée P_m est égale à la puissance absorbée par la molécule soumise à l'action de l'onde.

Le spectre d'absorption du monoxyde de carbone présente une bande centrée sur la pulsation $4 \cdot 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$. Dans quel domaine du spectre électromagnétique la puissance absorbée (et donc rayonnée) est-elle maximale ?

Calculer la raideur k du ressort modélisant la liaison chimique.

On donne : $m_c = 2 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et $m_o = 2,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

11. En se rappelant que l'absorption et donc l'émission est due à l'apparition du moment dipolaire induit P_{0i} (question 8), expliquer, sans faire de calcul, pourquoi les gaz majoritaires de l'atmosphère terrestre (O_2 et N_2) n'absorbent pas (et donc n'émettent pas) dans l'infrarouge.

Ces gaz ne contribuent donc pas au réchauffement de notre planète. On dit qu'ils ne sont pas des gaz à effet de serre.

TROISIEME PARTIE : Réchauffement de la terre par effet de serre

On se propose, dans cette partie, d'étudier le réchauffement de notre planète par effet de serre.

I- Rayonnement du corps noir

I.1. Donner la définition d'un corps noir.

On admet qu'un corps noir de température T émet, dans intervalle de fréquence ν et $\nu+d\nu$, la puissance surfacique $d\phi = M_\nu(\nu, T) d\nu$, avec :

$$\frac{d\phi}{d\nu} = M_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$: constante de Boltzmann
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.S}$: constante de Planck
 $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$: célérité de la lumière dans le vide
 T : température en Kelvin
 ν : fréquence en Hertz

I.2. Montrer que la puissance surfacique totale émise par un corps noir est donnée par la loi de Stefan :

$$\phi = \sigma T^4. \text{ On donne : } \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \text{ Déterminer la valeur numérique de la constante de Stefan } \sigma.$$

I.3.a. Exprimer, en fonction de λ , la puissance surfacique par intervalle de longueur d'onde $M_\lambda(\lambda, T) = \frac{d\phi}{d\lambda}$.

I.3.b. En déduire que la valeur λ_M , pour laquelle $M_\lambda(\lambda, T)$ est maximale, obéit à la loi de déplacement de Wien. On admet que $x_0 = 4,96$ est la solution de l'équation : $e^x (5 - x) = 5$.

I.3.c. Dans quel domaine du spectre électromagnétique la puissance émise par un corps noir de températures $T_1 = 300 \text{ K}$ est maximale ? Même question pour $T_2 = 6000 \text{ K}$.
 Pouvez-vous justifier l'appellation «noir» donnée à ce corps ?

II- Température de la terre

II.1. En admettant que le soleil se comporte comme un corps noir de température T_S , exprimer la puissance totale P_S rayonnée par le soleil en fonction de T_S , R_S et σ , où R_S est le rayon du soleil, supposé sphérique.

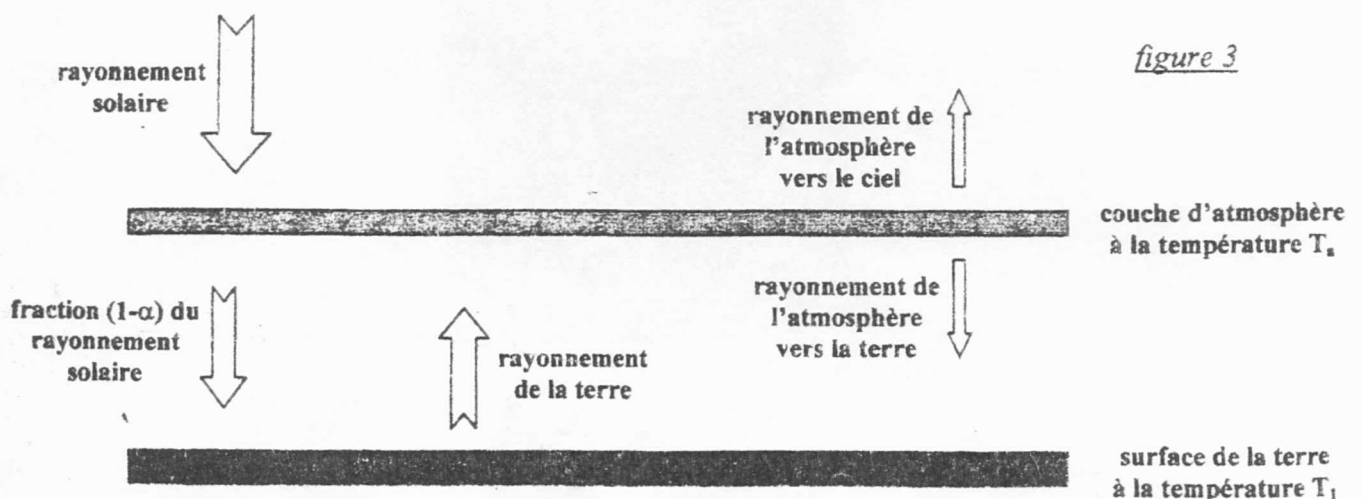
II.2. On désigne par D la distance moyenne de la terre au soleil et par R_T le rayon de la terre supposée sphérique. Montrer que la puissance P_T reçue par la terre s'écrit : $P_T = \frac{\pi \sigma R_S^2 R_T^2 T_S^4}{D^2}$.

II.3. On suppose que la terre de température T_0 , absorbant la totalité du rayonnement solaire qu'elle reçoit, se comporte comme un corps noir. Déterminer la valeur numérique de T_0 . Commenter.
 On donne : $R_S = 7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$; $D = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$; $T_S = 5700 \text{ K}$.

II.4. En réalité, la terre est entourée par son atmosphère qu'on assimile à une couche sphérique de gaz de même centre que la terre et de température uniforme T_a .

On suppose que l'épaisseur ϵ de la couche est négligeable devant R_T ($\epsilon \ll R_T$) et que la couche a sensiblement le même rayon R_T que la terre.

On désigne par T_1 la température de la surface de la terre en tenant compte de l'atmosphère.



On suppose, dans le modèle, schématisé sur la figure 3, que :

- la terre et l'atmosphère, de températures respectives T_1 et T_a , rayonnent comme des corps noirs.
- l'atmosphère absorbe la fraction α et la terre la fraction $(1-\alpha)$ du rayonnement solaire.
- La terre absorbe la totalité du rayonnement de l'atmosphère vers la terre et l'atmosphère absorbe la totalité du rayonnement de la terre.

En écrivant les équations traduisant les équilibres radiatifs pour l'atmosphère et pour la terre, exprimer la température T_1 en fonction de T_0 et α . Calculer T_1 pour $\alpha = 0,7$.

QUATRIEME PARTIE: Rayonnement d'un réseau de sources électromagnétiques

On considère N sources identiques d'ondes électromagnétiques (dipôles oscillants, antennes...), alignées sur l'axe (Oz) et disposées à égale distance d (de l'ordre de λ) les unes des autres (figure 4).

Un dispositif d'alimentation permet de commander les amplitudes et les phases relatives de ces sources.

C'est grâce à cette commande que les réseaux d'antennes peuvent produire des diagrammes de rayonnement ayant des formes voulues.

Une source de rang n , placée au point O_n , rayonne le champ électrique $\vec{E}_n$.

En un point M , se trouvant dans la zone de rayonnement ($OM = r \gg N\lambda$), $\vec{E}_n$ s'écrit, en notation complexe :

$$\vec{E}_n = \underline{E}_n \vec{u}_\theta = \frac{A_0}{r} f(\theta) e^{j\left(\frac{2\pi}{\lambda} r_n + \varphi_n\right)} \vec{u}_\theta.$$

Avec $r_n = O_n M$, $r = r_1 = O_1 M$, $\varphi_n = n \varphi_0$, A_0 et φ_0 deux constantes.

$f(\theta)$ est une fonction caractéristique du rayonnement propre de chaque source.

I- Diagramme de rayonnement

I.1. Montrer que la différence de phase ψ entre deux ondes rayonnées, dans la même direction θ , par deux sources consécutives s'écrit : $\psi = \varphi_0 - \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta$.

I.2. En déduire que l'amplitude complexe du champ $\underline{E}_n$ rayonné par la source placée en O_n ($1 \leq n \leq N$), peut se mettre sous la forme : $\underline{E}_n = \underline{D}_0 f(\theta) e^{j(n-1)\psi}$. On exprimera $\underline{D}_0$ en fonction de A_0 , λ , r et φ_0 .

I.3. Montrer que l'intensité de l'onde rayonnée par les N sources, constituant le réseau, définie par :

$$I = |\underline{E}|^2, \text{ peut se mettre sous la forme : } I = N^2 |\underline{D}_0|^2 f^2(\theta) F(\psi), \text{ où } F(\psi) = \left[\frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right]^2.$$

$\underline{E}$ est le champ électrique résultant. La fonction F est appelée facteur du réseau.

I.4. Pour quelles valeurs θ_m de θ la fonction F présente-t-elle des maxima principaux ? On introduira un entier relatif m , appelé ordre.

I.5.a. Vérifier que la condition pour avoir un rayonnement maximal d'ordre zéro ($m=0$), s'écrit :

$$|\varphi_0| \leq \frac{2\pi d}{\lambda}. \text{ On notera } \theta_0 \text{ la direction correspondant à ce maximum de rayonnement.}$$

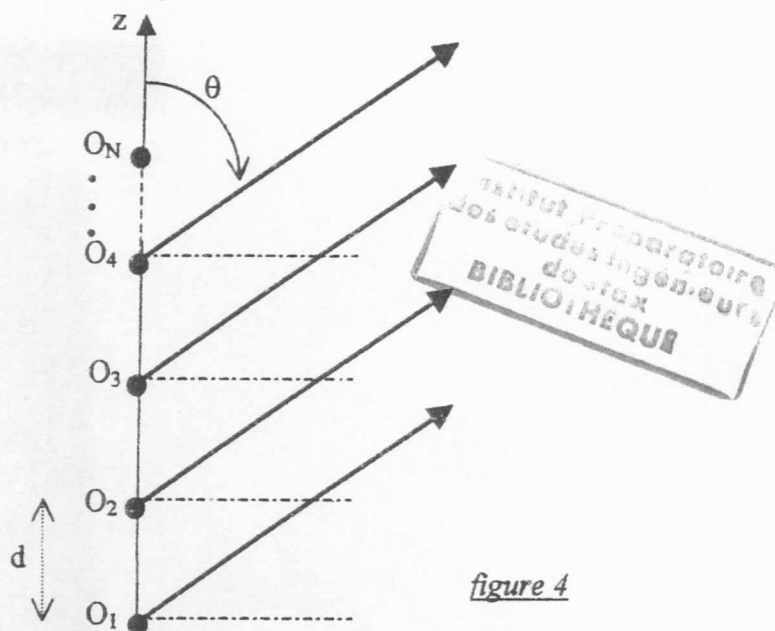


figure 4

I.5.b. En supposant que cette condition est satisfaite, montrer que si $d < \frac{\lambda}{1+|\cos\theta_0|}$, la direction $\theta = \theta_0$ est l'unique direction de rayonnement maximal (on écrira que les ordres $m = \pm 1$ ne correspondent pas à des directions de rayonnement maximal).

I.6. Pour cette question, on prendra $d = \frac{\lambda}{2}$, $\varphi_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ et $\theta \in [0, \pi/2]$.

I.6.a. Calculer θ_0 .

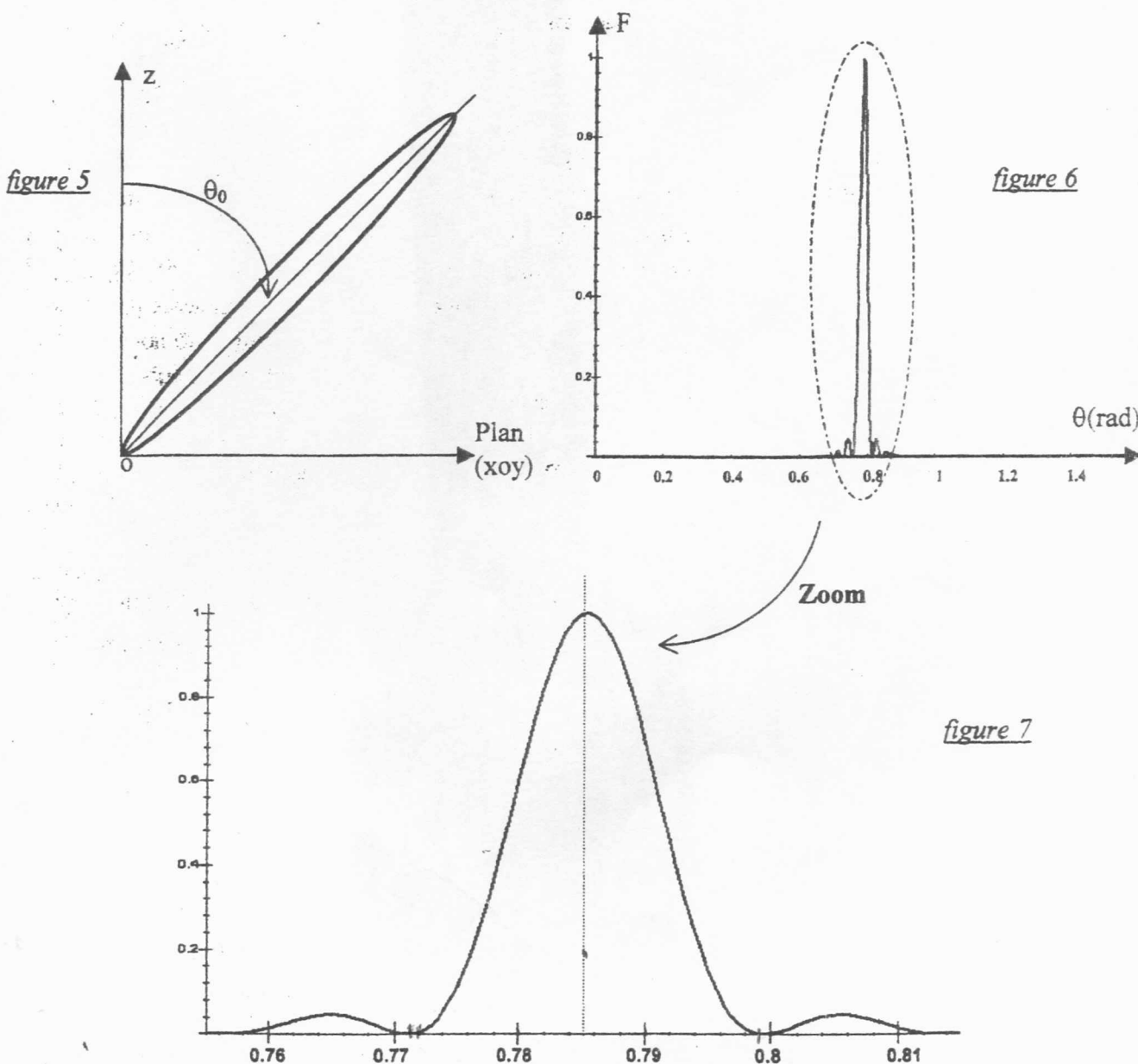
I.6.b. Vérifier que ce maximum principal d'ordre zéro est unique.

I.6.c. Sachant que les deux premiers minima nuls de la fonction $F(\psi)$ de part et d'autre d'un maximum principal correspondent à une variation de ψ de $\pm \frac{2\pi}{N}$, déterminer la largeur angulaire $\Delta\theta$ séparant les deux minima nuls qui entourent l'unique maximum principal correspondant à $\theta = \theta_0$.
On prendra $N = 800$.

I.7. Les figures 5 et 6 donnent respectivement le diagramme polaire de rayonnement d'un réseau d'antennes et la représentation de la fonction F en fonction de θ .

La figure 7 est un agrandissement (zoom) de la figure 6 au voisinage du maximum principal θ_0 .

En exploitant ces trois figures, déterminer θ_0 , φ_0 et N sachant que $d = \frac{\lambda}{2}$ et $N \gg 1$.



II- Principe du radar à balayage électronique

Avec une distance d inférieure à $\frac{\lambda}{2}$, on a montré qu'il y'a une seule direction de rayonnement maximal et en prenant $N \gg 1$ (en pratique quelques milliers), on assure une grande directivité du rayonnement émis. On a montré aussi que la direction du maximum de rayonnement fait l'angle $\theta = \theta_0$ avec l'axe du réseau s'écrit : $\cos \theta_0 = -\frac{\lambda \varphi_0}{2\pi d}$. Un déphaseur, dont le principe fera l'objet de la question II.1, permet de varier φ_0 . La variation de φ_0 dans le temps entraîne celle de la direction visée de l'espace.

II.1. Déterminer la fonction de transfert, $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_e}$, du montage représenté sur la figure 8.

$\underline{U}_e$ et $\underline{U}_S$ désignent respectivement les amplitudes complexes des tensions sinusoïdales d'entrée et de sortie.

Vérifier que ce montage est un simple déphaseur.

On exprimera, en fonction de la résistance R et de la capacité variable C du condensateur, le déphasage φ_0 introduit entre les tensions d'entrée et de sortie.

On suppose que l'amplificateur opérationnel idéal utilisé fonctionne en régime linéaire.

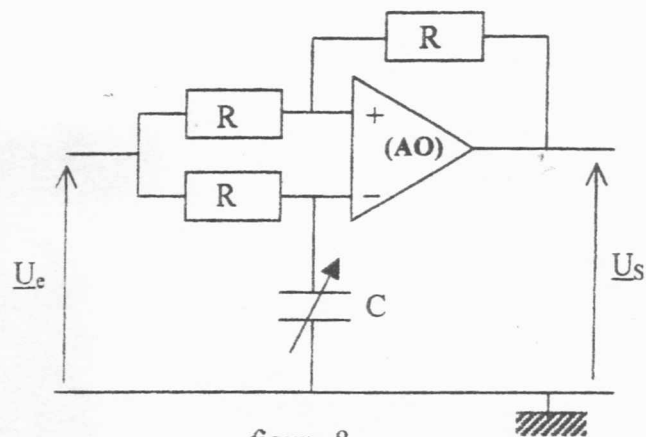


figure 8

II.2. En comparant la fréquence f de l'onde émise à celle de l'onde reçue après réflexion sur l'objet, on peut accéder à la composante V_T , suivant la direction radar-objet, du vecteur vitesse de l'objet.

On admet que la fréquence f' de l'onde reçue est différente de la fréquence f : $f' - f = f \frac{V_T}{c}$.

Le montage permettant de mesurer V_T (figure 9), comporte :

- un multiplieur de constante β : $U_3(t) = \beta U_1(t) \times U_2(t)$
- un filtre passe bas de fréquence de coupure f_C (à -3dB) ; $\underline{H} = 1$ dans la bande passante
- un dérivateur parfait : $U_5(t) = \frac{dU_4(t)}{dt}$
- un voltmètre V permettant de mesurer la tension efficace U_0 de la tension de sortie $U_5(t)$.

On applique à l'entrée du multiplieur les tensions $U_1(t)$ et $U_2(t)$ correspondant aux signaux émis (de fréquence f) et reçue (de fréquence f' voisine de f) :

$U_1(t) = a \cos(2\pi f t)$ et $U_2(t) = b \cos(2\pi f' t + \alpha)$, où a , b , et α sont des constantes.

II.2.a. Sachant que $|f' - f| \ll f_C \ll f' + f$, exprimer les tensions $U_3(t)$ et $U_4(t)$ en fonction de a , b , β , α , f et f' .

II.2.b. En déduire que l'indication U_0 du voltmètre permet d'accéder à la composante V_T de la vitesse l'objet mobile.

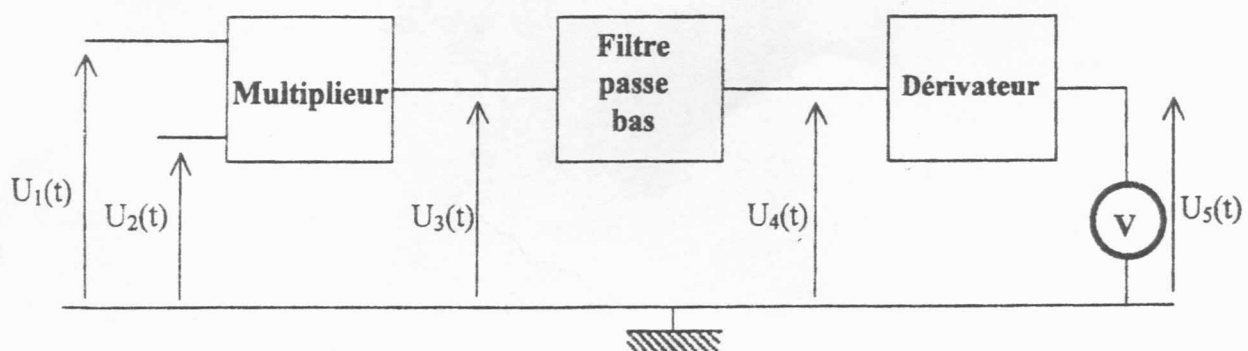


figure 9