



Concours Technologie
Epreuve de Physique



Date : Jeudi 07 Juin 2012 Heure : 8 H00 Durée : 4 H Nbre pages : 08
Barème : Problème 1 : 13 pts ; Problème 2 : 07 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données :

- Le vide est caractérisé par sa permittivité électrique $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$ et sa perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Accélération de pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$
- $\text{rôt}(\text{rôt}\vec{a}) = \text{grad}(\text{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}$
- Développement en série de Taylor au voisinage de $x_0 = 0$ de $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0} + \frac{x^2}{2!} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x=0} + \frac{x^3}{3!} \left(\frac{d^3f}{dx^3} \right)_{x=0} + \frac{x^4}{4!} \left(\frac{d^4f}{dx^4} \right)_{x=0} + 0(x^4)$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\text{rôt}\vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

L'espace est rapporté à un référentiel galiléen $\mathcal{R}(Oxyz)$ de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base des coordonnées cylindriques.

Problème 1

Dans tout le problème, on considère soit le régime stationnaire, soit l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

Première Partie : Obtention d'un champ magnétique

Une spire circulaire d'axe ascendant $(z'z)$ et de rayon a est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I_0 (Figure1).

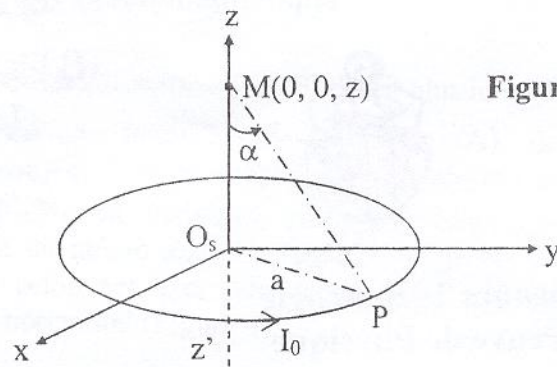


Figure 1

1. Montrer que le champ magnétique créé par cette spire en un point de son axe s'écrit : $\vec{B}_s(M) = B_s(z) \vec{u}_z$.

2. Montrer que $\vec{B}_s(M)$ peut se mettre sous la forme : $\vec{B}_s(M) = \frac{\mu_0 I_0}{2a} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$

3. Une bobine plate de centre O_1 et d'épaisseur négligeable, comporte N spires circulaires de rayon a , de même axe de symétrie ($z'z$). Elle est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I_0 .

3.1. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par cette bobine en un point $M(0, 0, z)$.

3.2. On pose $u = \frac{z}{a}$. Tracer l'allure de la courbe donnant $\frac{B_1(u)}{B_1(u=0)}$ en fonction de u .

Dans l'objectif d'obtenir un champ magnétique uniforme, on utilise les bobines d'Helmholtz : c'est un système de deux bobines plates identiques coaxiales de centres respectifs O_1 et O_2 tels que $O_1 O_2 = 2d$ (Figure 2). Elles sont parcourues par des courants stationnaires identiques de même intensité I_0 .

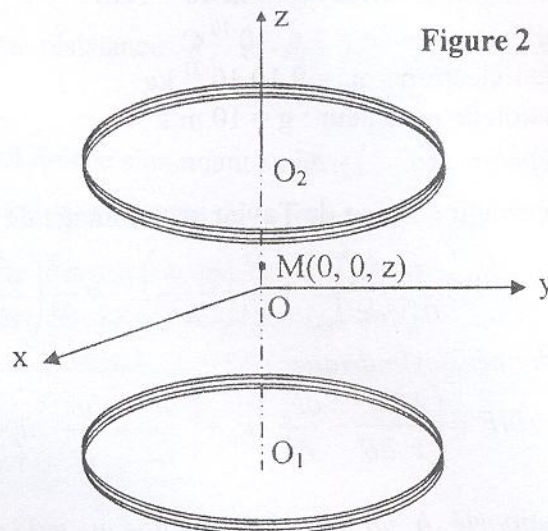


Figure 2

4.

4.1. Comment faut-il choisir le sens du courant I_0 dans chacune des bobines ? Justifier.

4.2. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_h(M) = B_h(z) \vec{u}_z$ en un point $M(0, 0, z)$, situé entre O_1 et O_2 .

5. Par des considérations de symétrie, justifier que $B_h(z)$ est une fonction paire.

6. On suppose que $z \ll d$. Montrer que pour $d = \frac{a}{2}$, $\vec{B}_h(M)$ peut être considéré comme uniforme à l'ordre 4 près.

7. Montrer que, dans ce cas, $B_h(z) \approx 1,44 B_1(0)$.

- On considère maintenant un solénoïde (S), supposé semi-infini et situé dans la région $z < 0$ (Figure 3). Il est parcouru par le courant $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et comporte n spires jointives par unité de longueur.

L'origine O de l'axe (Oz) correspond au centre de la face supérieure du solénoïde.

8. Déterminer l'expression $d\vec{B}(M, t)$ du champ élémentaire créé au point $M(0, 0, z)$ par la tranche de hauteur dz_{sc} du solénoïde.
9. En déduire le champ magnétique total $\vec{B}(M, t)$, créé au point M par le solénoïde semi-infini.
10. Ecrire $\vec{B}(M, t)$ sous la forme :

$$\vec{B}(M, t) = B_m(z) \cos(\omega t) \vec{u}_z,$$

$$\text{où } B_m(z) = \frac{1}{2} B_0 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right).$$

Préciser l'expression de B_0 .

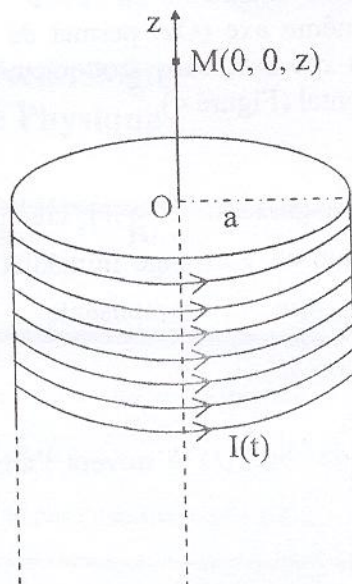


Figure 3

Deuxième Partie : Courants induits

11.
 - 11.1. Déduire des résultats précédents, l'expression du champ magnétique $\vec{B}_{sc}(M, t)$, dans le cas d'un solénoïde infini ($S\ell$).
 - 11.2. Justifier que $\vec{B}_{sc}(M, t)$ est uniforme à l'intérieur de ($S\ell$). On supposera que ce champ est nul à l'extérieur du solénoïde.
 12. Déterminer l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}(M, t)$ dont dérive $\vec{B}_{sc}(M, t)$ en tout point de l'espace.
- Un barreau métallique (b), de forme cylindrique, de rayon $b_0 < a$, de hauteur h et de conductivité électrique γ est placé à l'intérieur du solénoïde infini ($S\ell$) de sorte qu'ils sont coaxiaux et immobiles dans le référentiel d'étude. On suppose que $\vec{B}_{sc}(M, t)$ n'est pas perturbé par la présence du barreau (b).
13. Déterminer l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m$ induit dans le barreau métallique.
 14. En déduire la densité volumique $\vec{j}$ des courants induits dans (b). Quel nom donne-t-on à ces courants ?
 15. Déterminer l'expression $\frac{dP}{d\tau}$ de la puissance volumique instantanée dissipée dans le barreau.
 16. En déduire sa valeur moyenne dans le temps $\langle \frac{dP}{d\tau} \rangle$.
 17. Déterminer la puissance moyenne totale P_l dissipée dans (b).
 18. Citer une application du phénomène étudié dans cette partie.

Troisième Partie : Lévitation magnétique

On considère le solénoïde semi-infini (S) décrit plus haut (Figure 3).

Un anneau métallique indéformable circulaire (A), de masse $m = 12g$, de rayon $b \ll a$, d'épaisseur négligeable et d'axe (Oz) est initialement maintenu en $z = 0$. Une tige cylindrique verticale de même axe (Oz) permet de guider le mouvement de (A) selon cet axe, sans frottements, tout en restant dans un plan horizontal (Figure 4).

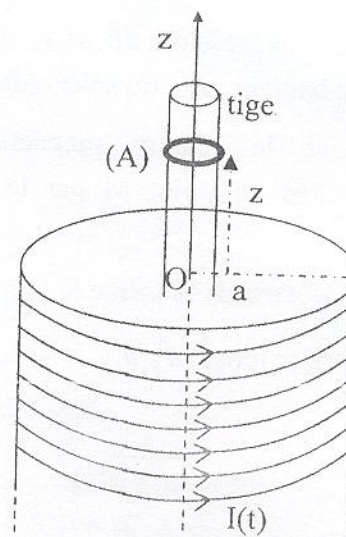


Figure 4

19. Montrer que le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$, créé par (S) en un point $M(r,\theta,z)$ situé au voisinage immédiat de l'axe (Oz), possède une composante radiale

$$\vec{B}_r(M,t) = -\frac{r}{2} \frac{dB_m(z)}{dz} \cos(\omega t) \vec{u}_r.$$

20. Déterminer le flux ϕ de $\vec{B}(M,t)$ à travers l'anneau (A) maintenu à la cote z .

21.

21.1. En déduire la fem induite par (S) dans (A).

21.2. Expliciter le résultat en fonction de ω , $\phi_m(z) = \pi b^2 B_m(z)$ et $\sin(\omega t)$.

22. On note $i_A(t)$ l'intensité du courant électrique circulant dans (A), fixe à la cote z .

Sachant que l'anneau est caractérisé par sa résistance R_A et son inductance propre L_A , déterminer $i_A(t)$.

23. Déterminer $\vec{F}$ la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur (A).

24. En réalité, l'anneau n'est sensible qu'à la valeur moyenne de la force.

Déduire la force moyenne dans le temps $\langle \vec{F} \rangle$ exercée sur (A).

25. Un modèle plus réaliste, tenant compte des propriétés magnétiques de la tige cylindrique verticale, montre que la valeur moyenne de $\vec{F}$, pour $0 \leq z \leq h_0$, est donnée par :

$$\langle \vec{F} \rangle = F_m(\omega) \left[1 - \frac{z}{h_0} \right] \vec{u}_z$$

- 25.1. Quelle condition doit satisfaire F_m pour que l'anneau (A), positionné initialement en $z = 0$, décolle ?

- 25.2. Dans ces conditions, à quelle cote z_e l'anneau se stabilisera-t-il ?

- 25.3. Calculer z_e pour $h_0 = 0,6m$ et $F_m = 0,15N$.

- 25.4. Déterminer la nature du mouvement de l'anneau (A) autour de z_e .

- 25.5. Conclure concernant la stabilité de l'équilibre de (A) en $z = z_e$.

Quatrième Partie : Utilisation de matériaux supraconducteurs

Pour s'affranchir de l'effet Joule, on utilise des matériaux supraconducteurs, qui sont dotés de deux propriétés macroscopiques remarquables au dessous d'une température critique T_c :

- pouvoir transporter un courant sans dissipation
- expulser tout champ magnétique extérieur appliqué : effet Meissner

Dans le modèle microscopique considéré, les porteurs de charges assurant la conduction, de masse individuelle m_0 et de charge q , initialement au repos, sont mis en mouvement sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, supposé uniforme et stationnaire.

26. Ecrire l'équation du mouvement d'un porteur de charge assurant la conduction.

27. En déduire une relation liant $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ et $\vec{E}$. On note n_s la densité volumique des charges de conduction.

On suppose que cette relation reste valable en régime quasi - stationnaire.

28. Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu supraconducteur. On rappelle que le milieu est localement neutre et qu'il peut être assimilé au vide (ϵ_0, μ_0).

29. Montrer que le champ magnétique vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} \right] = \vec{0}$$

où λ est une grandeur dont on donnera l'expression.

30. Montrer que λ , est homogène à une longueur. Calculer λ dans le cas de l'étain pour une densité $n_s = 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $q = e$ et $m_0 = m_e$.

31. En 1935, les frères F et H. London ont publié un article décrivant théoriquement « l'effet Meissner ». Ils ont postulé que la solution à retenir était de la forme :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}$$

En déduire que le champ $\vec{B}$ obéit à l'équation de « London » : $\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}$.

Dans la suite de cette partie, on considère le cas d'une plaque supraconductrice illimitée de largeur $2d$ dans la direction x ; l'origine des espaces O étant choisie au centre de la plaque (figure 5)

32. On suppose que le champ à l'extérieur du matériau est uniforme $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \vec{u}_y$, et on cherche un champ

$\vec{B} = B(x) \vec{u}_y$ dans le matériau.

Ecrire la solution générale de l'équation de London.

33. Les courants surfaciques sont supposés nuls en $x = \pm d$.

33.1. Déterminer l'expression de $B(x)$ en fonction de B_0 , x ,

λ et d .

33.2. Tracer l'allure du graphe de $B(x)$ dans le cas où $\lambda \ll d$.

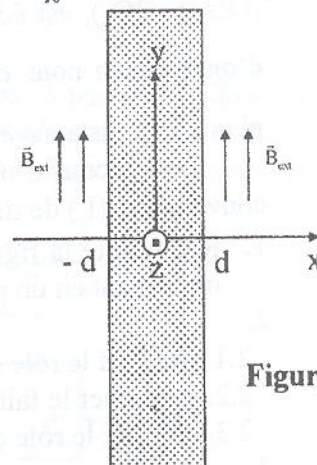


Figure 5

33.3. Déterminer l'expression de la densité volumique de courant $\vec{j}(x)$ dans le supraconducteur.

33.4. Tracer l'allure du graphe de $j(x)$ dans le cas où $\lambda \ll d$.

33.5. En quoi ce modèle explique-t-il l'effet Meissner ?

Problème 2

L'interféromètre de Michelson est constitué de deux miroirs plans M_1 et M_2 orthogonaux l'un à l'autre et d'une lame semi - réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice (Sp) (Figure 6). Cette lame, inclinée de 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 , est caractérisée par des facteurs de transmission et de réflexion en intensité égales à $\frac{1}{2}$.

L'interféromètre est plongé dans l'air dont l'indice de réfraction sera pris égal à 1.

On suppose que (Sp) n'introduit aucun déphasage supplémentaire.

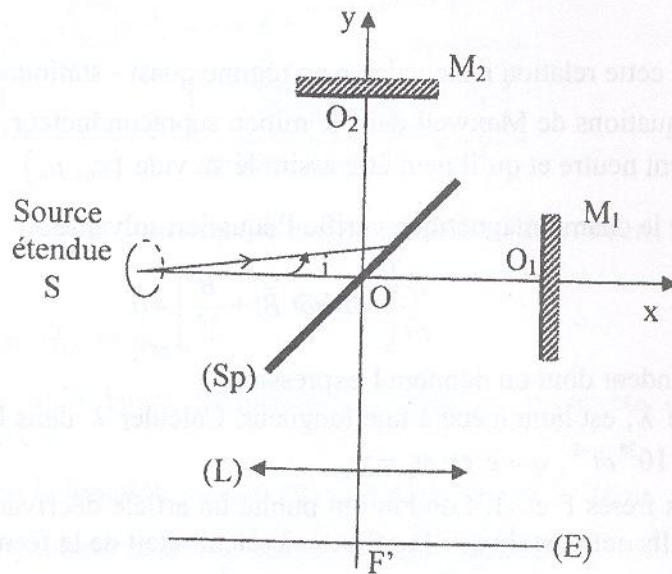


Figure 6

Première Partie : Source de lumière monochromatique

L'interféromètre de Michelson, se trouvant initialement réglé en "contact optique" ($OO_1 = OO_2$), est éclairé par une source étendue S supposée monochromatique de longueur d'onde λ . On note $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ le nombre d'onde. On translate le miroir M_1 normalement à son plan d'une distance e suivant les x croissants.

Un écran d'observation (E) est placé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente (L) de distance focale image f' .

1. Reproduire la figure 6 et la compléter en faisant apparaître les trajets des deux rayons qui interfèrent en un point M de (E).
 2.
 - 2.1. Quel est le rôle de la lame (Sp) ?
 - 2.2. Expliquer le fait que la moitié de l'intensité lumineuse incidente est perdue.
 - 2.3. Préciser le rôle de la lentille convergente.
3.
 - 3.1. Déterminer la différence de chemin optique δ entre les deux ondes qui interfèrent au point M en fonction de e et de l'angle d'incidence i .
 - 3.2. Justifier l'observation des anneaux circulaires d'égale inclinaison sur (E).

4. En supposant que la tache centrale en F' est brillante, déterminer le rayon r_k du $k^{\text{ième}}$ anneau sombre. On suppose que les diverses incidences sont faibles.
5. Un détecteur est placé au centre F' de (E). Il délivre un signal $I(e)$ proportionnel à l'éclairement qu'il reçoit.
 - 5.1. Montrer que : $I(e) = I_0 (1 + \cos(4\pi\sigma e))$. Que représente I_0 ?
 - 5.2. En déduire la période de $I(e)$.

Deuxième Partie : Influence de la largeur spectrale de la source de lumière

Le profil de la source S n'est plus monochromatique mais ayant une largeur spectrale $\Delta\sigma$. Elle émet une raie contenant toutes les radiations dont le nombre d'onde σ est compris entre $\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}$ et $\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}$.

Cette raie est modélisée par un profil rectangulaire de sorte que chaque radiation élémentaire de largeur $d\sigma$ donne au centre de l'écran l'intensité élémentaire $dI_0(\sigma) = \frac{I_0}{\Delta\sigma} d\sigma$.

6. Montrer que le signal détecté est donné par : $I(e) = I_0(1 + V \cos \varphi_0)$.
Donner les expressions de V et φ_0 .

7.

7.1. Représenter l'allure de $V(e)$.

7.2. En déduire l'allure de $I(e)$.

8. Pour quelle valeur e_1 de e la fonction V s'annule pour la première fois ?

9.

9.1. Définir la largeur de cohérence temporelle L_c de la source S .

9.2. Calculer L_c dans les deux cas suivants :

i) Lampe spectrale donnant une raie : $\Delta\sigma_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$

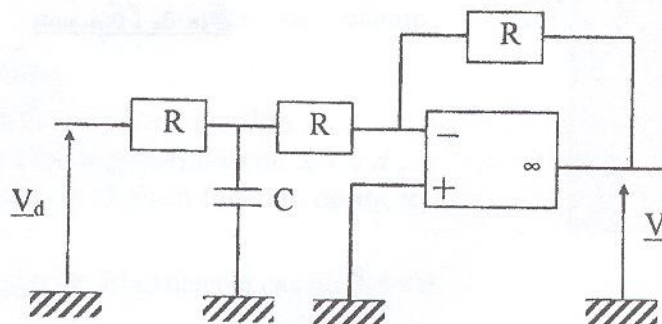
ii) Laser He-Ne : $\Delta\sigma_2 = 5 \text{ m}^{-1}$

Commenter les résultats obtenus.

Troisième Partie : Contrôle du déplacement du miroir M_1

Le déplacement du miroir M_1 est assuré par un moteur « pas à pas ». La vitesse de ce moteur est commandée par la tension $V(t)$ délivrée par le circuit schématisé sur la figure 7. Dans toute cette partie l'amplificateur opérationnel est supposé parfait et fonctionne en régime linéaire.

Figure 7



10. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{V}{V_d} = \frac{H_{01}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{01}}}$.

Déterminer H_{01} et ω_{01} .

11. Donner, en le justifiant, la nature de ce filtre. Que représentent H_{01} et ω_{01} ?

12. La position du miroir M_1 est contrôlée par une tension $x(t)$. Quelle opération mathématique doit-elle exister entre $x(t)$ et $V(t)$?

13. Le signal $x(t)$ est obtenu en considérant le circuit de la figure 8.

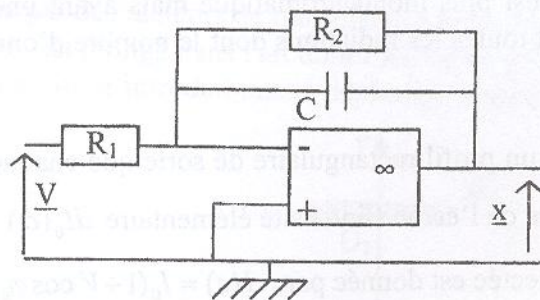


Figure 8

13.1. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{x}{V} = \frac{H_{02}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{02}}}$.

Déterminer H_{02} et ω_{02} .

13.2. Montrer qu'à basse fréquence, le circuit se comporte comme un amplificateur inverseur.

13.3. Quelle est la fonction assurée par ce circuit pour $\omega \gg \omega_{02}$.

14. Tracer le diagramme de Bode (gain et phase) de ce circuit.

15. La tension $V_d(t)$ est en réalité une tension différentielle, $V_d(t) = V_0 - x(t)$, où V_0 est une tension de référence.

15.1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{x(t)}{V_0}$.

15.2. Expliquer comment peut-on ainsi contrôler la position du miroir M_1 .

Fin de l'Epreuve