
Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session: Juin 2014

Concours Technologie

Correction de l'épreuve de Mathématiques

PROBLEME 1

Partie 1

1. (a) $y_h(x) = k \exp^{-\int x dx} = k \exp \frac{x^2}{2} \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y_p(x) = k(x) \exp \frac{x^2}{2}$
où $k(x) = \int_{\alpha}^x \exp \frac{-t^2}{2} dt$. et $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$y_G(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

(b) pour $k = 0$ et $\alpha = 0$ on trouve $y(x) = f(x) = \exp(\frac{x^2}{2}) \int_0^x \exp(\frac{-t^2}{2}) dt$ est la solution de (E)
qui vérifie: $f(0) = 0$

2. (a)

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p \quad \text{et donc} \quad y'_p = \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p x^{p-1}$$

ainsi l'équation (E) donne:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p x^{p-1} - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+1} = 1 \\ \text{ssi} & \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p - \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+1} = 1 \\ \text{ssi} & \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p - \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p-1} x^p = 1 \\ & \begin{cases} a_1 = 1, \\ (p+1) a_{p+1} - a_{p-1} = 0, \quad \forall p \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

d'où soit $k \geq 0$ posons $p = 2k + 1$

- Pour $k = 0$ donne $p = 1$ et donc $2a_2 = a_0$
- Pour $k = 1$ donne $p = 3$ et donc $4a_4 = a_2$
- Pour $k - 1$ on aura $p = 2k - 1$ et donc $2ka_{2k} = a_{2k-2}$

d'où : $2^k k! a_{2k} = a_0$ et par suite $a_{2k} = \frac{a_0}{2^k k!}$

de même pour $k = 0$ on aura $a_1 = 1$ ce qui est vrai.

Soit $k \geq 1$ posons $p = 2k$

- Pour $k = 1$ donne $p = 2$ et donc $3a_3 = a_1 = 1$
- Pour $k = 2$ donne $p = 4$ et donc $5a_5 = a_3$
- Pour k quelconque on aura $p = 2k$ et donc $(2k + 1)a_{2k+1} = a_{2k-1}$.

d'où :

$$3.5 \dots (2k + 1)a_{2k+1} = 1 \quad \text{et par suite} \quad a_{2k+1} = \frac{2^k k!}{(2k + 1)!}$$

(b) $f(0) = 0$ et donc $a_0 = 0$ et par suite :

$$\begin{cases} a_{2k} = 0 & \forall k \geq 0, \\ a_{2k+1} = \frac{2^k k!}{(2k + 1)!} & \forall k \geq 0. \end{cases}$$

(c) Ce qui donne le développement en série entière de f au voisinage de 0 suivant :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k + 1)!} x^{2k+1}$$

(d) La série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k + 1)!} x^{2k+1}$ possède le même rayon de convergence R_x que la série

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k + 1)!} x^{2k}$$

et donc on posant $X = x^2$ on aura la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k + 1)!} X^k$ de rayon de convergence R_X

En utilisant la règle d'Alembert on aura $R_X = +\infty$ et par suite $R_x = +\infty$.

(e) $g(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$

i. $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$ et donc en posant $X = x^2$ on aura la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k X^k}{2^k k!}$

et qui a $+\infty$ comme rayon de convergence (d'après la règle d'Alembert) et par suite le rayon de convergence cherché vaut $+\infty$

ii. Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!}$ a $+\infty$ comme rayon de convergence alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la primitive de g qui s'annule en 0 s'écrit :

$$\int_0^x g(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^k (2k + 1) k!}$$

(f) On a d'une part d'après (1) $f(1) = \sqrt{e} g(1)$
ce qui donne

$$f(1) = \sqrt{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k (2k + 1) k!}$$

Et d'autre part d'après (c)

$$f(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k k!}{(2k+1)!}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! (2n+1)!}.$$

Partie 2

1. (a) En utilisant la règle d'Alembert on aura $R = 1$

(b) Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\frac{|x^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement et par suite uniformément sur $[-1, 1]$, de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a la fonction $\frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1, 1]$ et donc d'après le théorème de continuité, on aura la somme h de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ est continue sur $[-1, 1]$.

(c) Pour $x \in]-1, 1[$, le théorème de dérivation des séries entières donne :

$$h'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

or on sait que : $\forall t \in]-1, 1[; \log(1-t) = -\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}$ ce qui donne :

$$\frac{\log(1-t)}{t} = -\sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{n}$$

et donc :

$$\forall t \in]-1, 1[\text{ on a : } h'(t) = \frac{-\log(1-t)}{t}$$

(d) Par suite on conclut, comme $h(0) = 0$:

$$\forall x \in]-1, 1[; h(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

2. (a) Par simple intégration par partie, on obtient :

$$a_n(u) = 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } b_n(u) = \frac{1}{n}$$

(b) En utilisant l'identité de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt = \frac{(a_0)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} ((a_n)^2 + (b_n)^2) \text{ (avec } T = 2\pi$$

On aura :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = h(1)$$

3.

$$\forall x \in]0,1[\text{ on a } \Phi(x) = h(x) + h(1-x) + (\text{Log}(x))\text{Log}(1-x)$$

Φ est C^1 sur $]0,1[$ car h et Log le sont et $\forall x \in]0,1[$ on a $(1-x) \in]0,1[$

4.

$$\forall x \in]0,1[, \Phi'(x) = h'(x) + h'(1-x) + \frac{\text{Log}(1-x)}{x} - \frac{\text{Log}(x)}{1-x}$$

or d'après 1)d) on a : $h'(x) = -\frac{\text{Log}(1-x)}{x}$ et donc $h'(1-x) = -\frac{\text{Log}(x)}{1-x}$ d'où :

$$\Phi'(x) = 0, \forall x \in]0,1[\text{ et donc } \Phi(x) = \text{cte sur }]0,1[$$

En calculant la limite en 1^- de Φ on aura $\text{cte} = h(1) + h(0)$ car h est continue en 0 et en 1 et car $(\text{Log}(x))(\text{Log}(1-x))$ admet 0 comme limite en 1^- .
Enfin sachant que $h(0) = 0$ on conclut le résultat.

5. En utilisant 2)b) et en remplaçant x par $\frac{1}{2}$ dans Φ on aura le résultat demandé.

PROBLÈME 2

PARTIE I

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On pose :

$$E = \{(u_k)_k \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \text{ telque : } u_{k+2} = au_{k+1} + bu_k, \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Clairement, la suite nulle de $\mathbb{K}$ est dans E , donc $E \neq \emptyset$.
- Soit $((u_k)_k, (v_k)_k) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (\alpha u + v)_{k+2} &= \alpha u_{k+2} + v_{k+2} \\ &= \alpha(au_{k+1} + bu_k) + av_{k+1} + bv_k \\ &= a(\alpha u_{k+1} + v_{k+1}) + b(\alpha u_k + v_k) \\ &= a(\alpha u + v)_{k+1} + b(\alpha u + v)_k, \end{aligned}$$

donc $\alpha(u_k)_k + (v_k)_k \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^2$ l'application définie par : $\Phi((u_k)_k) = (u_0, u_1)$.

(a) Montrer que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- Soit $((u_k)_k, (v_k)_k) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha(u_k)_k + (v_k)_k) &= \Phi(((\alpha u + v)_k)_k) \\ &= ((\alpha u + v)_0, (\alpha u + v)_1) \\ &= (\alpha u_0 + v_0, \alpha u_1 + v_1) \\ &= \alpha(u_0, u_1) + (v_0, v_1) \\ &= \alpha\Phi((u_k)_k) + \Phi((v_k)_k). \end{aligned}$$

Ainsi Φ est linéaire.

- $\Phi((u_k)_k) = (0, 0) \Rightarrow (u_0, u_1) = (0, 0) \Rightarrow u_0 = u_1 = 0$.

Par récurrence $u_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi Φ est injective.

- $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2$, la suite $(v_k)_k$ de E définie par $v_0 = x$ et $v_1 = y$ vérifie bien $\Phi((v_k)_k) = (x, y)$.

Il s'en suit que Φ est surjective.

On en conclut que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- (b) En déduire que E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et donner $\dim(E)$.
 • E est isomorphe à $\mathbb{K}^2$ qui est de dimension finie sur $\mathbb{K}$, donc E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2) = 2$.
3. Soit $r \in \mathbb{K}$, $r \neq 0$. Montrer que les deux relations suivantes sont équivalentes :

- (a) $(r^k)_k \in E$.
 (b) r est une solution de l'équation : $t^2 - at - b = 0$ (*).
 • Puisque $r \neq 0$ alors, on a :
 $(r^k)_k \in E \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, r^{k+2} = ar^{k+1} + br^k$
 $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, r^{k+2} = (ar + b)r^k$
 $\Leftrightarrow r^2 = ar + b$.

4. On suppose que l'équation (*) admet deux racines distinctes $r_1 \in \mathbb{K}$ et $r_2 \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $((r_1^k)_k, (r_2^k)_k)$ est une base de E .
 • Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
 $\alpha(r_1^k)_k + \beta(r_2^k)_k = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \alpha r_1^k + \beta r_2^k = 0$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = 0$ et $\alpha r_1 + \beta r_2 = 0$
 $\Rightarrow \beta = -\alpha$ et $\alpha(r_1 - r_2) = 0$.

Comme $r_1 \neq r_2$ alors $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi la famille $(r_1^k)_k, (r_2^k)_k$ est libre.

• $\text{Card}((r_1^k)_k, (r_2^k)_k) = 2 = \dim_{\mathbb{K}}(E)$, donc la famille $((r_1^k)_k, (r_2^k)_k)$ est génératrice.
 On en conclut que la famille $((r_1^k)_k, (r_2^k)_k)$ est une base de E .

5. On suppose que l'équation (*) admet une racine double $r_1 \in \mathbb{K}$.

- (a) Montrer que la suite $(kr_1^k)_k$ est un élément de E .
 • En remarquant que $r_1 = \frac{a}{2}$ et en utilisant le fait que

$$r_1^{k+2} - ar_1^{k+1} - br_1^k = 0,$$

(voir la question précédente) alors, on a :

$$(k+2)r_1^{k+2} - a(k+1)r_1^{k+1} - bkr_1^k = k(r_1^{k+2} - ar_1^{k+1} - br_1^k) + r_1^{k+1}(2r_1 - a) = 0,$$

donc la suite $(kr_1^k)_k$ est un élément de E .

- (b) Montrer que la famille $((r_1^k)_k, (kr_1^k)_k)$ est une base de E .

- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Puisque $r_1 \neq 0$, alors :
 $\alpha(r_1^k)_k + \beta(kr_1^k)_k = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \alpha r_1^k + \beta k r_1^k = 0$
 $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \alpha + k\beta = 0$
 $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Ainsi la famille $(r_1^k)_k, (kr_1^k)_k$ est libre.

• $\text{Card}((r_1^k)_k, (kr_1^k)_k) = 2 = \dim_{\mathbb{K}}(E)$, donc la famille $((r_1^k)_k, (kr_1^k)_k)$ est génératrice.

On en conclut que la famille $((r_1^k)_k, (kr_1^k)_k)$ est une base de E .

6. Calculer le terme général de la suite $(d_k)_k$ définie par : $\begin{cases} d_0 = 1, d_1 = 2, \\ d_{k+2} = 2d_{k+1} - d_k, \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

• L'équation $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet une racine double $r_1 = 1$. D'après 5)b), il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $(d_k)_k = \alpha(1)_k + \beta(k)_k$ donc $d_k = \alpha + k\beta, \forall k \in \mathbb{N}$. Avec $d_0 = 1$ et $d_1 = 2$, on obtient $\alpha = \beta = 1$ et par suite

$$d_k = k + 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

PARTIE II

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $L_i = \sum_{j=1, j \neq i} |a_{i,j}|$ et $L = \max_{1 \leq i \leq n} (L_i + |a_{i,i}|)$.

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ et $X \in E_{\lambda}(A)$.

- (a) Montrer qu'il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$.

• L'ensemble $\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ est fini, donc il admet un maximum et par suite, il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$.

(b) Soit k l'entier trouvé dans la question précédente. Montrer qu'on a :

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq L_k.$$

• Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ . Comme $AX = \lambda X$ alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j = (\lambda - a_{i,i}) x_i \text{ et donc } \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} x_j = (\lambda - a_{k,k}) x_k.$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{k,k}| |x_k| &= \left| \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{k,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{k,j}| |x_j| \\ &\leq L_k |x_k|. \end{aligned}$$

Comme $|x_k| > 0$, alors $|\lambda - a_{k,k}| \leq L_k$.

(c) En déduire que : $|\lambda| \leq L$.

$$\begin{aligned} |\lambda| &\leq |\lambda - a_{k,k}| + |a_{k,k}| \\ &\leq L_k + |a_{k,k}| \\ &\leq L. \end{aligned}$$

2. On suppose que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a $|a_{i,i}| \geq L_i$.

(a) Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de A .

• Si 0 est une valeur propre de A , alors d'après la question précédente, il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $|0 - a_{k,k}| = |a_{k,k}| \leq L_k$, ce qui est absurde, donc 0 n'est pas une valeur propre de A .

(b) En déduire que A est inversible.

• 0 n'est pas une valeur propre de A donc $\det(A) \neq 0$ et par suite A est inversible.

PARTIE III

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $A_n(\alpha, \beta) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha, & \text{si } i = j, \\ \beta, & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$

1. Vérifier que : $A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0, 1)$.

• C'est clair que $\alpha I_n + \beta A_n(0, 1) = A_n(\alpha, \beta)$.

2. On pose : $B_n = A_n(2, 1)$.

(a) Calculer $\det(B_1)$ et $\det(B_2)$.

• Comme $B_1 = (2)$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\det(B_1) = 2$ et $\det(B_2) = 3$.

(b) Montrer que $\det(B_n) = 2\det(B_{n-1}) - \det(B_{n-2})$ pour tout $n \geq 3$.

• En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$\det(B_n) = 2\det(B_{n-1}) - \Delta_n \text{ avec } \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

En développant suivant la première ligne, on obtient $\Delta_n = \det(B_{n-2})$. D'où le résultat.

(c) En utilisant la question 6, partie I, calculer $\det(B_n)$.

• En posant $d_n = \det(B_n)$, alors d'après la question 6, partie I, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $d_n = a + bn$, $\forall n \geq 1$. Avec $d_1 = 2$ et $d_2 = 3$, on trouve $a = 1$ et $b = 1$ et par suite $d_n = n + 1$.

3. Déterminer $\ker(A_n(-2, 1))$.

Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En posant $A_n(-2, 1)X = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ alors un calcul simple montre que $a_1 = -2x_1 + x_2$, $a_k = x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}$ pour tout $2 \leq k \leq n-1$ et $a_n = x_{n-1} - 2x_n$.

Si $A_n(-2,1)X = 0$ alors les $(n-1)$ premières équations donnent $x_k = kx_1$ pour tout $2 \leq k \leq n$ et la dernière donne $(n-1)x_1 = 2nx_1$ donc $x_1 = 0$ et par suite $x_k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Ainsi : $\ker(A_n(-2,1)) = \{0\}$.

4. On pose : $D_n = A_n(0,1)$. On admet que $Sp_{\mathbb{C}}(D_n) = Sp_{\mathbb{R}}(D_n)$.

Soit $\mu \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n)$ et $X \in E_{\mu}(D_n)$.

- (a) Montrer, en utilisant la question 1.c) de la partie II, que $|\mu| \leq 2$.

• Pour la matrice D_n , on a : $L_1 + |a_{1,1}| = 1$, $L_i + |a_{i,i}| = 2$ pour tout $2 \leq i \leq n-1$ et $L_n + |a_{n,n}| = 1$. D'où $L = 2$ et par suite $|\mu| \leq 2$, d'après la question 1)c) de la partie II.

- (b) Montrer que $|\mu| < 2$ et en déduire qu'il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que

$$\mu = 2 \cos(\theta).$$

• Puisque $\ker(A_n(-2,1)) = \{0\}$ alors la matrice $D_n - 2I_n$ est inversible et par suite 2 n'est pas une valeur propre de D_n .

De même $\det(D_n + 2I_n) = \det(B_n) \neq 0$ donc (-2) n'est pas une valeur propre de D_n .

Il s'en suit que $|\mu| < 2$.

L'application $2 \cos$ est une bijection de $]0, \pi[$ sur $] -2, 2[$ donc il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\mu = 2 \cos(\theta)$.

- (c) Montrer que les composantes de X sont solutions de la récurrence : $\begin{cases} x_{k+1} - 2 \cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0, & 1 \leq k \leq n \\ x_0 = 0, & x_{n+1} = 0. \end{cases}$

• On a $D_n X = 2 \cos(\theta)X$ donc les composantes de X sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta)x_1 + x_2 = 0, \\ x_{k+1} - 2 \cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0, & 2 \leq k \leq n-1, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta)x_n = 0. \end{cases}$$

Si on impose les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, on trouve le système demandé.

- (d) En utilisant la question 6, de la partie I, calculer x_k pour $1 \leq k \leq n$.

• Les solutions de l'équation $r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1 = 0$ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ donc il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$x_k = ue^{ik\theta} + ve^{-ik\theta}.$$

Comme $x_k \in \mathbb{R}$, alors $v = \bar{u}$.

- (e) En déduire que les valeurs possibles pour θ sont : $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$, $1 \leq j \leq n$.

• la condition $x_0 = 0$ donne $\bar{u} = -u$ donc $u \in i\mathbb{R}$ et la condition $x_{n+1} = 0$ donne $u \sin((n+1)\theta) = 0$.

Si $X \neq 0$ alors $u \neq 0$ et par suite $\sin((n+1)\theta) = 0$. Il s'en suit que $\theta = \frac{j\pi}{n+1} = \theta_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Comme $\theta_j \in]0, \pi[$ alors $1 \leq j \leq n$.

- (f) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de D_n .

• Pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} x_k &= u(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) \\ &= 2iu \sin(k\theta), \end{aligned}$$

donc le vecteur V de composantes $v_k = \sin(k\theta)$, $1 \leq k \leq n$ est un vecteur propre de D_n associé à la valeur propre $\mu = 2 \cos(\theta)$.

Il s'en suit que pour chaque $1 \leq j \leq n$, le vecteur V_j de composantes $v_k^{(j)} = \sin(k\theta_j)$, $1 \leq k \leq n$ est un vecteur propre de D_n associé à la valeur propre $\mu_j = 2 \cos(\theta_j)$. Comme les θ_j , $1 \leq j \leq n$ sont distinctes deux à deux et la fonction $\cos$ est bijective sur l'intervalle $]0, \pi[$, alors les valeurs propres μ_j sont distinctes deux à deux.

Puisque $\text{Card}\{\mu_j, 1 \leq j \leq n\} = n$, alors on en conclut que

$$Sp_{\mathbb{R}}(D_n) = \{\mu_j, 1 \leq j \leq n\}$$

et les X_j , $1 \leq j \leq n$, sont les vecteurs propres de D_n .

- (g) En déduire que D_n est diagonalisable.

• D_n admet n valeurs propres simples donc elle est diagonalisable.

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence :

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n) \Leftrightarrow (\lambda + 2) \in Sp_{\mathbb{R}}(B_n).$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n) &\Leftrightarrow \det(D_n - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(B_n - 2I_n - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(B_n - (\lambda + 2)I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 2) \in Sp_{\mathbb{R}}(B_n). \end{aligned}$$

(b) Montrer que : $Sp_{\mathbb{R}}(B_n) = \{4 \cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}); 1 \leq j \leq n\}$.

$$\begin{aligned} \bullet Sp_{\mathbb{R}}(B_n) &= \{\lambda + 2, \lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(D_n)\} \\ &= \{\mu_j + 2, 1 \leq j \leq n\} \\ &= \{2 \cos(\frac{j\pi}{n+1}) + 2, 1 \leq j \leq n\} \\ &= \{4 \cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}), 1 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

6. Etablir les identités suivantes :

$$\sum_{j=1}^n \cos(\frac{j\pi}{n+1}) = 0,$$

$$\prod_{j=1}^n \cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}) = \frac{n+1}{4^n}.$$

• Comme D_n est diagonalisable, alors $Tr(D_n) = \sum_{j=1}^n \mu_j$. Il s'en suit que :

$$\sum_{j=1}^n \cos(\frac{j\pi}{n+1}) = 0.$$

• De même, B_n est diagonalisable car elle admet n valeurs propres simples, donc $\det(B_n) = \prod_{j=1}^n (4 \cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}))$. Avec $\det(B_n) = n+1$, on obtient :

$$\prod_{j=1}^n \cos^2(\frac{j\pi}{2(n+1)}) = \frac{n+1}{4^n}.$$

