

Concours en Physique Chimie

Correction de l'épreuve de Mathématiques

PARTIE I

1. Soit $x \in [0, 1]$.

(a) • $G_0 = \tilde{0}$ et $G_1 = \tilde{0}$, donc elles sont continues et dérivables en 0 et 1 respectivement.

$$\bullet \lim_{t \rightarrow x^-} G_x(t) = \lim_{t \rightarrow x^-} ((1-x)t) = x(1-x) = G_x(x)$$

et $\lim_{t \rightarrow x^+} G_x(t) = \lim_{t \rightarrow x^+} ((1-t)x) = x(1-x) = G_x(x)$, donc G_x est continue en x .

$$\bullet \lim_{t \rightarrow x^-} \frac{G_x(t) - G_x(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x^-} \frac{((1-x)t - x(1-x))}{t - x} = (1-x)$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow x^+} \frac{G_x(t) - G_x(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x^+} \frac{((1-t)x - x(1-x))}{t - x} = -x.$$

Comme $(1-x) \neq (-x)$ alors G_x n'est pas dérivable en x .

(b) • G_0 et G_1 sont des fonctions nulles, donc elles sont continues sur $[0, 1]$.

• Pour $x \in]0, 1[$, G_x est continue sur chacun des intervalles $[0, x[$ et $]x, 1]$ comme étant une fonction affine. Da plus, G_x est continue en x . Ainsi, G_x est continue sur $[0, 1]$.

(c) • C'est évident que $\|G_0\|_\infty = 0$ et $\|G_1\|_\infty = 0$.

• Pour $x \in]0, 1[$, G_x est strictement croissante sur l'intervalle $[0, x]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]x, 1]$, donc elle admet un maximum absolu en $t = x$ de valeur $x(1-x)$. Il s'en suit que $\|G_x\|_\infty = x(1-x)$, égalité encore vraie pour $x = 0$ et $x = 1$.

• Une étude simple de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur l'intervalle $]0, 1[$ montre qu'elle admet un maximum absolu en $\frac{1}{2}$ de valeur $\frac{1}{4}$. D'où $\|G_x\|_\infty \leq \frac{1}{4}$, inégalité encore vraie pour $x = 0$ et $x = 1$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On pose :

$$U_f(x) = \int_0^1 G_x(t) f(t) dt, \forall x \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned} \text{(a) } \bullet U_f(x) &= \int_0^x G_x(t) f(t) dt + \int_x^1 G_x(t) f(t) dt \\ &= (1-x) \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 (1-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{(b) } \bullet U_f(0) = \int_0^1 G_0(t) f(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

$$\bullet U_f(1) = \int_0^1 G_1(t) f(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0.$$

(c) • Les fonctions $t \mapsto t f(t)$ et $t \mapsto (1-t) f(t)$ sont continues sur les intervalles $[0, x]$ et $]x, 1]$ respectivement, donc les fonctions $x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$ et $x \mapsto \int_x^1 (1-t) f(t) dt$ sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et par suite U_f est

de classe C^1 sur $[0, 1]$.

(d) • Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\left(\int_0^x t f(t) dt\right)' = x f(x) \text{ et } \left(\int_x^1 (1-t) f(t) dt\right)' = -(1-x) f(x).$$

Il s'en suit que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} U_f'(x) &= -\int_0^x t f(t) dt + (1-x)(x f(x)) \\ &\quad + \int_x^1 (1-t) f(t) dt + x(-(1-x) f(x)) \\ &= -\int_0^x t f(t) dt + \int_x^1 (1-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

(e) • Comme dans c), U_f' est de classe C^1 sur $[0, 1]$, donc U_f est de classe C^2 sur $[0, 1]$.

• Pour tout $x \in [0, 1]$, $U_f''(x) = -x f(x) - (1-x) f(x) = -f(x)$.

(f) • C'est clair que U_f est solution sur $[0, 1]$ de ce problème différentiel.

• Si V_f est solution sur $[0, 1]$ de ce problème différentiel, alors $(U_f - V_f)'' = 0$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(U_f - V_f)(x) = ax + b$ pour tout $x \in [0, 1]$. Les conditions $(U_f - V_f)(0) = 0$ et $(U_f - V_f)(1) = 0$ donnent $a = b = 0$ et par suite $U_f = V_f$ sur $[0, 1]$.

3. Calculer U_f dans chacun des cas suivants :

(a) • D'après 2)e), pour tout $t \in [0, 1]$, $U_f''(t) = -e^t$, donc $U_f(t) = -e^t + at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. De plus, $U_f(0) = U_f(1) = 0$ donc $b = 1$ et $a = e - 1$. Ainsi, $\forall t \in [0, 1]$,

$$U_f(t) = -e^t + (e - 1)t + 1.$$

(b) • Pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $U_f''(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, d'où $U_f'(t) = -\arctan(t) + a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Il s'en suit que $U_f(t) = U_f(t) - U_f(0) = -\int_0^t \arctan(s) ds + at$.

Une intégration par parties donne :

$U_f(t) = -[s \arctan(s)]_0^t + \int_0^t \frac{s}{1+s^2} ds + at = -t \arctan(t) + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + at$. La condition $U_f(1) = 0$ donne $a = -\frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4}$. Il s'en suit que : $\forall t \in [0, 1]$,

$$U_f(t) = -t \arctan(t) + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)\right)t.$$

4. • Si $f \in E$, $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ donc d'après 2)e) U_f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et $U_f'' = -f$. Comme f est de classe C^∞ sur $[0, 1]$, alors U_f est de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

• Puisque $f \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(U_f)^{(2n)}(0) = -f^{(2n-2)}(0) = 0$ et

$(U_f)^{(2n)}(1) = -f^{(2n-2)}(1) = 0$. De plus, $U_f(0) = U_f(1) = 0$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(U_f)^{(2n)}(0) = 0$ et

$(U_f)^{(2n)}(1) = 0$. Il s'en suit que $U_f \in E$.

5. • Pour tout $x \in [0, 1]$, $U_{(\lambda f + \mu g)}(x) = \int_0^1 G_x(t)(\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_0^1 G_x(t)f(t)dt + \mu \int_0^1 G_x(t)g(t)dt = \lambda U_f(x) + \mu U_g(x) = (\lambda U_f + \mu U_g)(x)$.
D'où : $U_{(\lambda f + \mu g)} = \lambda U_f + \mu U_g$.

6. • Si $f \in E$, f est de classe C^∞ sur $[0, 1]$ donc $f^{(2p)}$ est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f^{(2p)})^{(2n)}(0) = f^{(2(n+p))}(0) = 0$ et $(f^{(2p)})^{(2n)}(1) = f^{(2(n+p))}(1) = 0$. Ainsi, $f^{(2p)} \in E$.
• D'après 2)e), pour tout $t \in [0, 1]$, $U_{f^{(2p)}}''(t) = -f^{(2p)}(t)$, donc
 $U_{f^{(2p)}}(t) = -f^{(2p-2)}(t) + at + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Avec $U_{f^{(2p)}}(0) = U_{f^{(2p)}}(1) = 0$ et $f^{(2p-2)}(0) = f^{(2p-2)}(1) = 0$, on obtient $a = b = 0$. Ainsi, $U_{f^{(2p)}} = -f^{(2p-2)}$.

PARTIE II

1. (a) • $\tilde{0} \in E$ car $\tilde{0}$ est de classe C^∞ sur $[0, 1]$ et $\tilde{0}(0) = \tilde{0}(1) = 0$. D'où : $E \neq \emptyset$.
• Si $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $(\lambda f + \mu g)$ est de classe C^∞ sur $[0, 1]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda f + \mu g)^{(2n)}(0) = \lambda f^{(2n)}(0) + \mu g^{(2n)}(0) = 0$ et $(\lambda f + \mu g)^{(2n)}(1) = \lambda f^{(2n)}(1) + \mu g^{(2n)}(1) = 0$. Ainsi, $(\lambda f + \mu g) \in E$.
On en conclut que E est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1], \mathbb{R})$.
- (b) • $\forall (f, g) \in (C([0, 1], \mathbb{R}))^2$,
 $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.
• $\forall (f, g, h) \in (C([0, 1], \mathbb{R}))^3 \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
 $\langle \lambda f + g, h \rangle = \int_0^1 (\lambda f + g)(t)h(t)dt = \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))h(t)dt = \lambda \int_0^1 f(t)h(t)dt + \int_0^1 g(t)h(t)dt = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.
• $\forall f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(t)dt \geq 0$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.
• $\forall f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(t)dt = 0$. Comme la fonction f^2 est continue, positive sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 f^2(t)dt = 0$ alors $f^2(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$ donc $f^2 = \tilde{0}$ et par suite $f = \tilde{0}$. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.
On en conclut que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.
- (c) • $\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dt \leq \|f\|_\infty^2$ donc $\|f\| \leq \|f\|_\infty$.
- (d) • $\|f_n - f\| \leq \|f_n - f\|_\infty$.
Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$ et par suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.

$$2. \bullet \|G_x\|^2 = \int_0^1 G_x^2(t)dt = (1-x)^2 \int_0^1 t^2 dt + x^2 \int_x^1 (1-t)^2 dt \\ = (1-x)^2 \frac{x^3}{3} + x^2 \frac{(1-x)^3}{3} = \frac{(1-x)^2 x^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \|s_k\|^2 &= \int_0^1 s_k^2(t) dt = 2 \int_0^1 \sin^2(k\pi t) dt \\ &= \int_0^1 (1 - \cos(2k\pi t)) dt = \left[t - \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi} \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

3. (a) • s_k est la composée des deux fonctions $\sin$ et $t \mapsto k\pi t$, donc elle est de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

(b) • Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

C'est vrai pour $n = 0$ car $s_k^{(0)} = s_k = (-1)^0 (k\pi)^0 s_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $s_k^{(2n)} = (-1)^n (k\pi)^{2n} s_k$.

$$\begin{aligned} s_k^{(2(n+1))} &= [s_k^{(2n)}]'' = (-1)^n (k\pi)^{2n} [s_k]'' \\ &= (-1)^n (k\pi)^{2n} (-1) (k\pi)^2 s_k \\ &= (-1)^{n+1} (k\pi)^{2(n+1)} s_k. \end{aligned}$$

(c) • s_k est de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

• $s_k^{(2n)}(0) = (-1)^n (k\pi)^{2n} s_k(0) = 0$ et $s_k^{(2n)}(1) = (-1)^n (k\pi)^{2n} s_k(1) = 0$.

Il s'en suit que $s_k \in E$.

4. Pour tout $(k, f) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on pose : $c_k(f) = \langle f, s_k \rangle$.

(a) • D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|c_k(f)| \leq \|f\| \|s_k\| = \|f\|$.

(b) • Une première intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} c_k(f^{(2n+2)}) &= [s_k(t) f^{(2n+1)}(t)]_0^1 - \sqrt{2}(k\pi) \int_0^1 \cos(k\pi t) f^{(2n+1)}(t) dt \\ &= -\sqrt{2}(k\pi) \int_0^1 \cos(k\pi t) f^{(2n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Par une deuxième intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} c_k(f^{(2n+2)}) &= -\sqrt{2}(k\pi) [\cos(k\pi t) f^{(2n)}(t)]_0^1 - (k\pi)^2 \int_0^1 s_k(t) f^{(2n)}(t) dt \\ &= -(k\pi)^2 c_k(f^{(2n)}). \end{aligned}$$

(c) • Par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, $c_k(f^{(0)}) = c_k(f) = (-1)^0 (k\pi)^0 c_k(f)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $c_k(f^{(2n)}) = (-1)^n (k\pi)^{2n} c_k(f)$.

$$\begin{aligned} c_k(f^{(2(n+1))}) &= -(k\pi)^2 c_k(f^{(2n)}) = -(k\pi)^2 (-1)^n (k\pi)^{2n} c_k(f) \\ &= (-1)^{n+1} (k\pi)^{2(n+1)} c_k(f). \end{aligned}$$

(d) • D'après 4)a) et 4)b), $|c_k(f)| = \left| -\frac{c_k(f'')}{(k\pi)^2} \right| \leq \frac{\|f''\|}{(k\pi)^2}$.

D'où : $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k(f) = 0$.

PARTIE III

On considère les applications Δ et σ définies sur E par : $\forall f \in E$,

$$\Delta(f) = -f'' \text{ et } \sigma(f) = U_f,$$

où U_f est la fonction définie dans (3).

1. • Pour tout $f \in E$, $(-f'') \in E$ d'après 6) partie I et $U_f \in E$ d'après 4) partie I.
 • $\forall (f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
 $\Delta(\lambda f + \mu g) = -(\lambda f + \mu g)'' = \lambda(-f'') + \mu(-g'') = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$ et, d'après 5) partie I, $\sigma(\lambda f + \mu g) = U_{\lambda f + \mu g} = \lambda U_f + \mu U_g = \lambda\sigma(f) + \mu\sigma(g)$.

Il s'en suit que Δ et σ sont des endomorphismes de E .

2. (a) D'après 6) partie I, pour tout $f \in E$, $\sigma(f'') = U_{f''} = -f$.
 (b) • Pour tout $f \in E$, $\sigma \circ \Delta(f) = \sigma(\Delta(f)) = \sigma(-f'') = -\sigma(f'') = f$. De plus, $\sigma \circ \Delta$ et Id_E ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivé E , donc $\sigma \circ \Delta = Id_E$.
 • Pour tout $f \in E$, $\Delta \circ \sigma(f) = \Delta(\sigma(f)) = -(\sigma(f))'' = -U_f'' = f$. De plus, $\Delta \circ \sigma$ et Id_E ont même ensemble de départ et même ensemble d'arrivé E , donc $\Delta \circ \sigma = Id_E$.
 (c) D'après b) $\Delta \circ \sigma = \sigma \circ \Delta = Id_E$ donc σ est un automorphisme de E et $\sigma^{-1} = \Delta$.

3. (a) • $\langle \Delta(f), g \rangle = - \int_0^1 f''(t)g(t)dt = -[g(t)f'(t)]_0^1 + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ car $g(0) = g(1) = 0$.

Une nouvelle intégration par parties donne :

$$\int_0^1 f'(t)g'(t)dt = [g'(t)f(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t)dt = \langle f, \Delta(g) \rangle$$

car $f(0) = f(1) = 0$.

- (b) • Puisque $f(0) = f(1) = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta(f), f \rangle &= - \int_0^1 f''(t)f(t)dt = -[f(t)f'(t)]_0^1 + \int_0^1 f'(t)f'(t)dt \\ &= \int_0^1 (f'(t))^2 dt = \|f'\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

4. • $\Delta(s_k) = -s_k'' = -(-1)(k\pi)^2 s_k = (k\pi)^2 s_k$ donc la fonction s_k est un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre $k^2\pi^2$.

5. Soit λ une valeur propre de Δ et g un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre λ .

- (a) D'après 3)b) partie III, $0 \leq \langle \Delta(g), g \rangle = \langle \lambda g, g \rangle = \lambda \|g\|^2$ donc $\lambda \geq 0$ car $\|g\|^2 > 0$. De plus, puisque Δ est inversible, alors $\lambda \neq 0$.

On en conclut que $\lambda > 0$.

- (b) • Puisque $\Delta(g) = \lambda g$ alors $-g'' = \lambda g$, d'où $g'' + \lambda g = 0$.

• $g \in E$ donc $g(0) = g(1) = 0$.

- (c) i. • L'équation caractéristique de l'équation différentielle : $y'' + \lambda y = 0$ est $r^2 + \lambda = 0$. Elle admet deux racines $r_1 = i\sqrt{\lambda}$ et $r_2 = -i\sqrt{\lambda}$. La solution générale sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle : $y'' + \lambda y = 0$ est de la forme : $x \mapsto ae^{i\sqrt{\lambda}x} + \bar{a}e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ avec $a \in \mathbb{C}$ ou $x \mapsto \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- ii. D'après a) et c), $\lambda > 0$ et g est de la forme : $x \in [0, 1] \mapsto \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $g(0) = g(1) = 0$.

• La condition $g(0) = 0$ donne $\alpha = 0$.

• La condition $g(1) = 0$ donne $\beta \neq 0$ et $\sqrt{\lambda} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ donc $\lambda = k^2\pi^2$ et $g = \beta s_k$.

Remarque

Si on utilise la forme exponentielle de g , on obtient $a + \bar{a} = 0$ et $ae^{i\sqrt{\lambda}} + \bar{a}e^{-i\sqrt{\lambda}} = 0$ donc $a \in i\mathbb{R}^*$ et $2ia \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, ce qui donne $\lambda = k^2\pi^2$ et $g = 2ias_k$.

(d) • Soit λ une valeur propre de Δ et g un vecteur propre associé. D'après c) ii), il existe $(k, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda = k^2\pi^2$ et $g = \beta s_k$.

Inversement, d'après 4) de cette partie, tout élément non nul de $Vect(s_k)$ est un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre $k^2\pi^2$.

Il s'en suit que $Sp(\Delta) = \{k^2\pi^2, k \in \mathbb{N}^*\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace propre de Δ associé à la valeur propre $k^2\pi^2$ est $Vect(s_k)$.

(e) • Puisque $\sigma = \Delta^{-1}$ alors $Sp(\sigma) = \{\frac{1}{k^2\pi^2}, k \in \mathbb{N}^*\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre $k^2\pi^2$ est $Vect(s_k)$.

(f) • $\langle G_x, s_k \rangle = U_{s_k}(x) = [\sigma(s_k)](x) = [\frac{1}{k^2\pi^2}s_k](x) = \frac{s_k(x)}{k^2\pi^2}$.

(g) • D'après 3)a) de cette partie, pour tout $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $k \neq l$,

$$\langle s_k, s_l \rangle = \frac{1}{k^2\pi^2} \langle \Delta(s_k), s_l \rangle = \frac{1}{k^2\pi^2} \langle s_k, \Delta(s_l) \rangle = \frac{l^2\pi^2}{k^2\pi^2} \langle s_k, s_l \rangle = \frac{l^2}{k^2} \langle s_k, s_l \rangle, \text{ donc } \langle s_k, s_l \rangle = 0.$$

• D'après 2), partie II, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|s_k\| = 1$.

Ainsi, la famille $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

PARTIE IV

1. Pour $(x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$, on désigne par $u_{x,n}$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$u_{x,n}(t) = \frac{s_n(x)}{\pi^2 n^2} s_n(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

(a) • Pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$, $|u_{x,n}(t)| \leq \frac{2}{\pi^2 n^2}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{\pi^2 n^2}$ converge comme étant une série de Riemann d'ordre 2, donc la série $\sum_{n \geq 1} u_{x,n}$ converge normalement et par suite uniformément sur $[0, 1]$.

(b) • Puisque chaque $u_{x,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ est continue sur $[0, 1]$ et la série $\sum_{n \geq 1} u_{x,n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$,

alors $H_x = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{x,n}$ est continue sur $[0, 1]$.

(c) i. • $\langle H_x, s_k \rangle = \int_0^1 [\sum_{n=1}^{+\infty} u_{x,n}(t)] s_k(t) dt = \int_0^1 [\sum_{n=1}^{+\infty} u_{x,n}(t) s_k(t)] dt.$

Comme pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$, $|u_{x,n}(t) s_k(t)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2 n^2}$ alors la série $\sum_{n \geq 1} u_{x,n} s_k$ converge uniformément sur $[0, 1]$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_{x,n}(t) s_k(t) \right] dt &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_0^1 u_{x,n}(t) s_k(t) dt \right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n(x)}{\pi^2 n^2} \left[\int_0^1 s_n(t) s_k(t) dt \right] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n(x)}{\pi^2 n^2} \delta_{n,k} = \frac{s_k(x)}{\pi^2 k^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle H_x, s_k \rangle = \frac{s_k(x)}{k^2 \pi^2}$.

ii. • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\langle H_x, s_k \rangle = \langle G_x, s_k \rangle$ donc $\langle G_x - H_x, s_k \rangle = 0$. D'après le résultat admis, $G_x - H_x = 0$ et donc $G_x = H_x$.

(d) • Pour tout $x \in [0, 1]$, $G_x(x) = H_x(x)$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n^2(x)}{\pi^2 n^2} = x(1-x)$. D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi x)}{n^2} = \frac{\pi^2 x(1-x)}{2}.$$

• Pour $x = \frac{1}{2}$, on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Comme $\sin^2(2p\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin^2((2p+1)\frac{\pi}{2}) = 1$, $\forall p \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ donc $(1 - \frac{1}{4}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$. D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. Pour $(x, N) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$, on pose : $H_{x,N} = \sum_{n=1}^N u_{x,n}$.

(a) • $H_{x,N}$ est une somme finie de fonctions continues sur $[0, 1]$ donc elle est continue sur $[0, 1]$.

• Pour tout $t \in [0, 1]$, $|H_x(t) - H_{x,N}(t)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_{x,n} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_{x,n}\|_{\infty}$ qui tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ car c'est le reste d'une série numérique convergente, donc la suite $(H_{x,N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers H_x .

$$(b) \bullet \|H_{x,N}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \leq \frac{1}{4}.$$

$$\bullet \|H_x\|_\infty = \|G_x\|_\infty \leq \frac{1}{4}, \text{ d'après 1)c) partie I.}$$

(c) • Puisque la suite $(H_{x,N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers H_x , d'après 1)d) de la partie II, la suite $(\|H_{x,N}\|)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\|H_x\|$.

$$\bullet \| \|H_x\|^2 - \|H_{x,N}\|^2 \| = \| \|H_x\| + \|H_{x,N}\| \| \times \| \|H_x\| - \|H_{x,N}\| \|$$

$$\leq \frac{1}{2} \| \|H_x\| - \|H_{x,N}\| \|.$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \| \|H_x\| - \|H_{x,N}\| \| = 0$ alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} (\|H_x\|^2 - \|H_{x,N}\|^2) = 0$.

$$(d) \bullet H_{x,N}^2(t) = \left[\sum_{n=1}^N \frac{s_n(x)}{\pi^2 n^2} s_n(t) \right] \left[\sum_{m=1}^N \frac{s_m(x)}{\pi^2 m^2} s_m(t) \right] = \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=1}^N \frac{s_n(x)}{\pi^2 n^2} \frac{s_m(x)}{\pi^2 m^2} s_n(t) s_m(t) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^N \left[\frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} s_n^2(t) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{s_n(x) s_m(x)}{\pi^4 n^2 m^2} s_n(t) s_m(t) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} s_n^2(t) + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{s_n(x) s_m(x)}{\pi^4 n^2 m^2} s_n(t) s_m(t).$$

$$(e) \bullet \|H_{x,N}\|^2 = \int_0^1 H_{x,N}^2(t) dt = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^N \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} s_n^2(t) + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{s_n(x) s_m(x)}{\pi^4 n^2 m^2} s_n(t) s_m(t) \right] dt$$

$$= \left[\sum_{n=1}^N \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} \int_0^1 s_n^2(t) dt + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{s_n(x) s_m(x)}{\pi^4 n^2 m^2} \int_0^1 s_n(t) s_m(t) dt \right]$$

$$= \left[\sum_{n=1}^N \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} \|s_n\|^2 + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{s_n(x) s_m(x)}{\pi^4 n^2 m^2} \langle s_n, s_m \rangle \right] = \sum_{n=1}^N \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} \text{ car } \langle s_n, s_m \rangle = \delta_{nm}.$$

$$\bullet \|H_x\|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|H_{x,N}\|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=1}^N \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4}.$$

$$(f) \bullet \|H_x\|^2 = \|G_x\|^2 = \frac{(1-x)^2 x^2}{3} \text{ donc } \frac{1}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n^2(x)}{n^4} = \frac{(1-x)^2 x^2}{3}. \text{ Il s'en suit que :}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi x)}{n^4} = \frac{\pi^4 (1-x)^2 x^2}{6}.$$

$$\bullet \text{ Pour } x = \frac{1}{2}, \text{ on a : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}, \text{ d'où : } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \text{ donc } (1 - \frac{1}{16}) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} \text{ et par suite } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$