



Concours Technologie Epreuve de Mathématiques

Date: Lundi 8 Juin 2015

Heure : 8 H

Durée: 4 heures

Nb pages: 4

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Rappels et Notations

- On désigne par :

- $C([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme définie par :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

- $C^{\infty}([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de classe C^{∞} sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $f^{(k)}$ la dérivée k -ème de $f \in C^{\infty}([0, 1], \mathbb{R})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ avec la convention $f^{(0)} = f$.

- $\tilde{0}$ la fonction nulle sur $[0, 1]$.

- $E = \{f \in C^{\infty}([0, 1], \mathbb{R}), f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(1) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

- Pour $x \in]0, 1[$, on note G_x la fonction définie pour tout $t \in [0, 1]$ par :

$$G_x(t) = \begin{cases} (1-x)t & \text{si } t \leq x, \\ x(1-t) & \text{si } x < t. \end{cases} \quad (1)$$

Pour $x = 0$ (respectivement $x = 1$), on pose $G_0 = \tilde{0}$ (respectivement $G_1 = \tilde{0}$).

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$s_k(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t), \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (2)$$

PARTIE I

- Soit $x \in [0, 1]$.

- Etudier la continuité et la dérivabilité de G_x en $t = x$ en distinguant les cas : $x = 0$, $x = 1$ et $x \in]0, 1[$.

- (b) Montrer que $G_x \in C([0, 1], \mathbb{R})$.
- (c) Montrer que $\|G_x\|_\infty = x(1-x)$ et en déduire que $\|G_x\|_\infty \leq \frac{1}{4}$.
2. Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. On pose :

$$U_f(x) = \int_0^1 G_x(t)f(t)dt, \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3)$$

(a) Vérifier que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad U_f(x) = (1-x) \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 (1-t) f(t) dt.$$

- (b) Calculer $U_f(0)$ et $U_f(1)$.
- (c) Montrer que U_f est de classe C^1 sur $[0, 1]$.
- (d) Calculer $U'_f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- (e) En déduire que U_f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et $U''_f = -f$.
- (f) Montrer que U_f est l'unique solution sur $[0, 1]$ du problème différentiel :

$$\begin{cases} y'' = -f, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

3. Calculer U_f dans chacun des cas suivants :

(a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$.

(b) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

4. Montrer que, pour tout $f \in E$, $U_f \in E$.

5. Montrer que, pour tout $(f, g) \in (C([0, 1], \mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$U_{(\lambda f + \mu g)} = \lambda U_f + \mu U_g.$$

6. Montrer que, pour tout $(p, f) \in \mathbb{N}^* \times E$, $f^{(2p)} \in E$ et $U_{f^{(2p)}} = -f^{(2p-2)}$.

PARTIE II

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1], \mathbb{R})$.
- (b) Montrer que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire sur $C([0, 1], \mathbb{R})$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- (c) Montrer que, pour tout $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\| \leq \|f\|_\infty$.
- (d) En déduire que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $C([0, 1], \mathbb{R})$ qui converge vers $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.
2. Montrer que, pour tout $(x, k) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$,

$$\|G_x\| = \frac{(1-x)x}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \|s_k\| = 1,$$

où s_k est la fonction définie dans (2).

3. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, s_k est de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$s_k^{(2n)}(t) = (-1)^n (k\pi)^{2n} s_k(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

(c) En déduire que $s_k \in E$.

4. Pour tout $(k, f) \in \mathbb{N}^* \times C([0, 1], \mathbb{R})$, on pose : $c_k(f) = \langle f, s_k \rangle$.

(a) Montrer que, pour tout $f \in E$, $|c_k(f)| \leq \|f\|$.

(b) Montrer que, pour tout $(f, n) \in E \times \mathbb{N}$, $c_k(f^{(2n+2)}) = -(k\pi)^2 c_k(f^{(2n)})$.

(c) En déduire que, pour tout $(f, n) \in E \times \mathbb{N}$, $c_k(f^{(2n)}) = (-1)^n (k\pi)^{2n} c_k(f)$.

(d) Montrer que, pour tout $f \in E$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k(f) = 0$.

PARTIE III

On considère les applications Δ et σ définies sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \Delta(f) = -f'' \quad \text{et} \quad \sigma(f) = U_f,$$

où U_f est la fonction définie dans (3).

1. Montrer que Δ et σ sont des endomorphismes de E .

2. (a) Montrer que, pour tout $f \in E$, $\sigma(f'') = -f$.

(b) Déterminer les endomorphismes $\sigma \circ \Delta$ et $\Delta \circ \sigma$.

(c) En déduire que σ est un automorphisme de E et donner son inverse σ^{-1} .

3. (a) Montrer que, pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle \Delta(f), g \rangle = \langle f, \Delta(g) \rangle$.

(b) Vérifier que, pour tout $f \in E$, $\langle \Delta(f), f \rangle \geq 0$.

4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction s_k est un vecteur propre de Δ associé à une valeur propre que l'on précisera.

5. Soit λ une valeur propre de Δ et $g \in E$ un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre λ .

(a) Montrer en utilisant 2.(c) et 3.(b) de cette partie, que $\lambda > 0$.

(b) Montrer que g est une solution non nulle sur $[0, 1]$ du problème différentiel :

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

(c) i. Donner la forme de la solution générale sur $[0, 1]$ de l'équation différentielle :

$$y'' + \lambda y = 0.$$

ii. En utilisant les conditions $y(0) = y(1) = 0$, en déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = k^2 \pi^2$.

(d) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Δ est $\{k^2 \pi^2, k \in \mathbb{N}^*\}$.

(e) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace propre de Δ associé à la valeur propre $k^2 \pi^2$ est la droite vectorielle de E engendrée par la fonction s_k .

(f) Déterminer les valeurs propres de σ et les sous-espaces propres correspondants. (On pourra utiliser 2.(c) de cette partie).

(g) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle G_x, s_k \rangle = \frac{s_k(x)}{k^2 \pi^2}.$$

(h) En utilisant 3.(a) de cette partie, montrer que la famille $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

PARTIE IV

Dans cette partie, on admet le résultat suivant :

Si f est un élément de $C([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $\langle f, s_k \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$, alors $f = 0$.

1. Pour $(x, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$, on désigne par $u_{x,n}$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$u_{x,n}(t) = \frac{s_n(x)}{\pi^2 n^2} s_n(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_{x,n}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

(b) En déduire que sa somme H_x est un élément de $C([0, 1], \mathbb{R})$.

(c) i. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\langle H_x, s_k \rangle = \frac{s_k(x)}{k^2 \pi^2}$.

ii. En déduire que : $G_x = H_x$.

(d) Déterminer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi x)}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. Pour $(x, N) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$, on pose : $H_{x,N} = \sum_{n=1}^N u_{x,n}$.

(a) Montrer que $H_{x,N} \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et que la suite $(H_{x,N})_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers H_x .

(b) Montrer que : $\|H_{x,N}\| \leq \frac{1}{4}$ et $\|H_x\| \leq \frac{1}{4}$.

(c) En déduire, en utilisant 1.(d) de la partie II, que la suite $(\|H_{x,N}\|^2)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\|H_x\|^2$.

(d) Montrer que :

$$H_{x,N}^2(t) = \sum_{n=1}^N \frac{s_n^2(x)}{\pi^4 n^4} s_n^2(t) + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{s_n(x)s_m(x)}{\pi^4 n^2 m^2} s_n(t)s_m(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

(e) En déduire que : $\|H_x\|^2 = \frac{1}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s_n^2(x)}{n^4}$.

(f) Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi x)}{n^4}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$