



Concours Technologie Epreuve de Physique

Date : Jeudi 11 Juin 2015	Heure : 8 H	Durée : 4 H	Nb pages : 7
Barème : Problème 1 : 5 pts	Problème 2 : 5.5 pts	Problème 3 : 6 pts	Problème 4 : 3.5 pts

Seules les calculatrices non programmables sont autorisées

Une présentation claire et soignée des copies est vivement recommandée. Une numérotation claire et précise des réponses aux questions est indispensable. Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données numériques

Charge élémentaire : $e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron : $m_e=0.91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c=3.0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

La permittivité électrique du vide est tel que : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=9 \cdot 10^9 \text{ SI}$

Perméabilité magnétique : $\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$

Formulaires : $\text{rot}(\text{rot}\vec{u}) = \text{grad}(\text{div}\vec{u}) - \Delta\vec{u}$

Problème 1

L'approche classique permettant d'expliquer le phénomène de conduction dans un métal consiste à considérer que les électrons libres sont des particules qui obéissent aux lois de la mécanique classique. Le milieu matériel considéré ici est globalement neutre. Il est décrit par un ensemble d'électrons évoluant au sein d'un réseau constitué de charges positives fixes.

Les interactions de ces électrons avec ce milieu sont prises en compte en leur affectant une masse m et en introduisant une force de

frottement $\vec{F}_f = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$ où τ est une constante

positive caractéristique du milieu et $\vec{v}$ est la vitesse associée au mouvement d'ensemble des électrons sous l'effet d'un champ électrique.

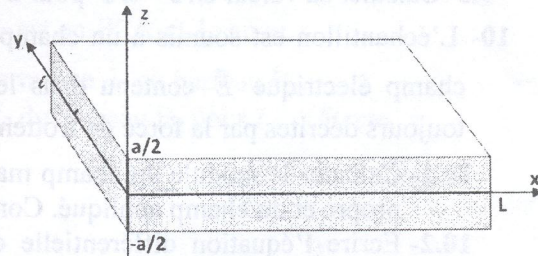


Figure 1

Le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique qui lui est appliquée.

On considère dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ un échantillon parallélépipédique (figure 1) délimité par les plans $x=0$ et $x=L$, $y=0$ et $y=l$, $z=-a/2$ et $z=a/2$. Cet échantillon est soumis à un champ électrique permanent et uniforme $\vec{E}$.

- 1- Ecrire l'équation de mouvement de l'électron de charge $(-e)$ animé d'une vitesse $\vec{v}$.
- 2- Expliquer pourquoi la vitesse moyenne des électrons $\langle \vec{v}(t=0) \rangle = \vec{0}$ est nulle en absence de $\vec{E}$.
- 3- On annule brusquement le champ électrique. Déterminer, à une constante près, la solution de cette équation. Quelle est l'unité de τ et préciser sa signification physique ?
- 4- Déterminer l'expression de $\vec{v}$ en présence de $\vec{E}$. Exprimer celle correspondante au régime permanent. Ecrire cette vitesse sous la forme $\vec{v} = \mu \vec{E}$ où μ est la mobilité des électrons à exprimer en fonction de e , m et τ .
- 5- Montrer que lorsqu'on ne tient pas compte de la force de frottement, on trouve un résultat en contradiction avec l'expérience.
- 6- Le matériau considéré contient n électrons par unité de volume, déterminer en régime permanent la densité de courant $\vec{j}_0$ engendrée par ce mouvement de charge. Exprimer la loi d'Ohm reliant $\vec{j}_0$ au champ $\vec{E}$. En déduire la conductivité électrique γ_0 du matériau en fonction de e , m , n et τ .
- 7- La conduction est assurée par des électrons de masse effective $m=0,06m_e$, avec m_e la masse de l'électron. Calculer τ pour $\gamma_0=100 \Omega.m^{-1}$ et $n=10^{24}m^{-3}$. Commenter la valeur obtenue.
- 8- Le champ électrique étant appliqué suivant Ox , déterminer l'expression de l'intensité de courant traversant le matériau à travers le plan yOz . Exprimer de même en fonction de j_0 et γ_0 la différence de potentiel entre les plans $x=0$ et $x=L$. En déduire la résistante R_0 de l'échantillon.
- 9- On se propose de déterminer le champ magnétique propre $\vec{B}_p$ créé par l'échantillon parcouru par le courant de densité volumique $\vec{j}_0 = j_0 \vec{u}_x$. Il est considéré comme une distribution volumique de courant infinie d'épaisseur a ($a \ll L$ et $a \ll l$).
 - 9.1- Par des considérations de symétrie, déterminer en tout point de l'espace, la direction de $\vec{B}_p$ et les variables dont-il dépend.
 - 9.2- Montrer que ce champ est nul dans le plan $z=0$.
 - 9.3- Ecrire l'équation locale du théorème d'Ampère, et déterminer $\vec{B}_p$ dans la région $-a/2 \leq z \leq a/2$.
 - 9.4- Ce champ est-il à flux conservatif ?
 - 9.5- Calculer sa valeur en $z=-a/2$ pour $a=10 \mu m$ et $j_0=10^6 A.m^{-2}$.
- 10- L'échantillon est soumis à un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$ d'intensité $B=1T$ et à un champ électrique $\vec{E}$ contenu dans le plan xOy . Les interactions électroniques sont toujours décrites par la force de frottement $\vec{F}_f$.
 - 10.1- Calculer le module du champ magnétique résultant de la superposition du champ propre et du champ appliqué. Commenter.
 - 10.2- Ecrire l'équation différentielle du mouvement de l'électron en fonction de la densité volumique du courant $\vec{j}$ parcourant l'échantillon.
 - 10.3- Montrer qu'en régime permanent, on obtient la relation suivante :

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{\gamma_0} j_x + \frac{B}{ne} j_y \\ E_y = -\frac{B}{ne} j_x + \frac{1}{\gamma_0} j_y \end{cases}$$

Où j_x et j_y sont les composantes de $\vec{j}$ dans le plan xOy .

10.4- On applique une différence de potentiel V entre $x=0$ et $x=L$. Le champ électrique $\vec{E}$ est supposé uniforme $\vec{E} = E \vec{u}_x$. Etablir la nouvelle expression de l'intensité de courant à travers le plan yOz . Montrer que V peut s'écrire sous la forme :

$$V = \frac{1}{\gamma_0} \left(1 + \left(\frac{\gamma_0 B}{ne} \right)^2 \right) j_x L$$

10.5- Déterminer l'expression de la nouvelle résistance R de l'échantillon ; et en déduire son écart:

$$\eta = \frac{R - R_0}{R_0}$$

Calculer cet écart à l'aide des données numériques précédentes. Commenter.

Problème 2

On se propose d'étudier dans cette partie la propagation d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale de pulsation ω dans un conducteur. Celui-ci est décrit par un ensemble d'électrons (charge $-e$, masse m_e). Ce milieu, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, possède les mêmes constantes électrique et magnétique que le vide ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$). Dans la suite on ne considère que le régime forcé sinusoïdal du mouvement de charges. En notation complexe, le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad \text{avec } i^2 = -1 \text{ et } E_0 \text{ une constante positive.}$$

11- Ce conducteur contient n électrons par unité de volume. Ecrire l'équation différentielle du mouvement des électrons. On néglige la force de frottement et l'effet de la force magnétique de l'onde. On suppose que les dimensions atomiques sont faibles devant la longueur d'onde.

12- Déterminer la densité de courant $\vec{j}$ engendrée par ce mouvement. L'exprimer en fonction de ϵ_0 , ω , $\vec{E}$ et d'une pulsation de coupure ω_p telle que $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}$. En déduire l'expression de la conductivité électrique du milieu.

13- A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de conservation de la charge, montrer que la densité de charges ρ dans le conducteur est nulle. En déduire que $\vec{E}$ est transverse.

14- Ecrire l'équation de Maxwell Ampère et établir l'équation de dispersion donnant le carré du module du vecteur d'onde k^2 en fonction de ω , ω_p et c . Décrire le comportement de l'onde dans le conducteur pour $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$.

15- Exprimer quand c'est possible les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g de l'onde. Comparer v_ϕ et c , puis commenter.

16- Citer et expliquer une application de cette propagation mettant en évidence son intérêt dans le domaine des télécommunications.

17- Dans la suite, on tient compte des collisions électroniques à l'aide de la force de frottement $\vec{F}_f = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$. Déterminer les expressions de la densité de courant $\vec{j}$ et de la conductivité électrique. En déduire que la nouvelle équation de dispersion peut s'écrire :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\omega_p^2}{\omega \left(\frac{1}{\tau} + i\omega \right)} \right)$$

18- On étudie dans cette question le cas des collisions fortes en basse fréquence $\omega \ll \frac{1}{\tau}$.

18.1- En déduire la nouvelle équation de dispersion.

18.2- On donne $\omega_p = 10^{14}$ rad/s, $\tau = 10^{-16}$ s, et on se place dans le domaine de fréquence tel que ω (rad/s) $\in [10^8, 10^{10}]$. Montrer que dans ces conditions, la solution de l'équation de dispersion s'écrit : $k = \frac{1-i}{\delta}$. Donner l'expression de δ . Quelle est sa signification physique ?

Calculer δ pour $\omega = 10^{10}$ rad/s et $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega \cdot m^{-1}$; commenter.

18.3- Ecrire la nouvelle expression du champ électrique de l'onde en fonction de δ . Qu'elle est la nature de cette onde ? Donner sa vitesse de phase.

18.4- En déduire l'expression de son champ magnétique $\vec{B}$.

18.5- Déterminer la valeur moyenne dans le temps de son vecteur de Poynting.

18.6- Exprimer la puissance moyenne qui traverse une section S perpendiculaire à (Oz) sous la forme : $P = P_0 e^{-\alpha z}$ où P_0 et α sont des constantes à exprimer en fonction de S , E_0 , γ et δ . Quelle est l'unité de α et préciser sa signification physique ?

19- On étudie dans cette question la réflexion sur un conducteur parfait.

19.1- Vers quelle limite tend δ pour un conducteur parfait ? En déduire les valeurs du champ électromagnétique et de la densité de courant dans un tel conducteur. Décrire le comportement d'une onde envoyée sur celui-ci.

19.2- La densité de courant est-elle nulle à la surface de ce conducteur ? Justifier.

Problème 3

On considère dans le système d'axes (O, x, y, z) une onde électromagnétique sinusoïdale (onde S) de pulsation ω se propageant dans le vide. En notation complexe, son champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \sin(\alpha y) e^{i(\omega t - kz)} (\vec{u}_x + i\beta \vec{u}_y) \quad \text{où } \beta \text{ est une constante positive}$$

20- On étudie dans cette partie le cas où $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$. L'onde considérée se propage entre deux plans conducteurs parfaits d'équations $y = 0$ et $y = L > 0$ (figure 2).

20.1- Cette onde est-elle progressive ? Est-elle plane ? Justifier les deux réponses.

20.2- Ecrire les équations de Maxwell dans l'espace vide entre 0 et L. Etablir l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans cet espace.

20.3- Déterminer la relation de dispersion reliant k^2 , α , c et ω .

21.1- Ecrire les conditions aux limites sur $\vec{E}$ en $y = L$, et montrer que les valeurs possibles de α s'écrivent en fonction d'un nombre entier m . En déduire k^2 en fonction de ω , L , c et m .

21.2- Montrer qu'il existe une pulsation de coupure ω_{cm} , au dessous de laquelle il n'y a plus de propagation de l'onde entre les deux plans.

21.3- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde. Ce champ est-il transverse ?

21.4- Ecrire les conditions aux limites sur $\vec{B}$ au niveau de l'interface $y=L$. En déduire la densité de courant surfacique sur cette interface.

22- Dans cette question on se place dans le cas où $k=0$ et $\alpha = \frac{\pi}{L}$.

22.1- Montrer que ω_{cm} ne peut prendre qu'une seule valeur que l'on donnera en fonction de L et c . Quelle est dans ce cas la nature de l'onde ?

22.2- Déterminer la densité d'énergie électromagnétique moyenne dans le temps.

23- Le terme en sinus de l'onde S montre que celle-ci résulte d'un phénomène d'interférence entre deux ondes. On se place dans la suite sur le plan d'équation $y = \frac{\pi}{2\alpha}$ présentant une frange brillante avec $\beta \neq 0$.

23.1- Ecrire en notation réelle les expressions des composantes E_x et E_y du champ électrique de cette onde.

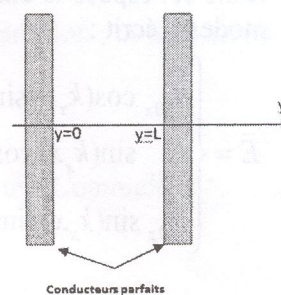


Figure 2

23.2- Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par l'extrémité de $\vec{E}$. Quelle est la polarisation de cette onde pour $\beta=0$ et $\beta=1$.

23.3- Etablir l'expression de $\vec{E} \wedge \frac{d\vec{E}}{dt}$ et discuter en fonction de β le sens de rotation de la polarisation. Distinguer les cas $\beta>0$, $\beta<0$, $\beta=0$ et $\beta=1$.

24- Considérons une cavité vide de forme parallélépipédique de longueur d et de section carrée de côté $2a$ (figure 3). Les faces de cette cavité sont des conducteurs parfaits. Des ondes stationnaires de fréquence bien précises peuvent s'établir dans l'espace vide de cette cavité. Ces ondes constituent les modes de résonance d'une telle cavité.

Dans cet espace le champ électrique de ces modes s'écrit :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \\ E_{0y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \\ E_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \end{cases}$$

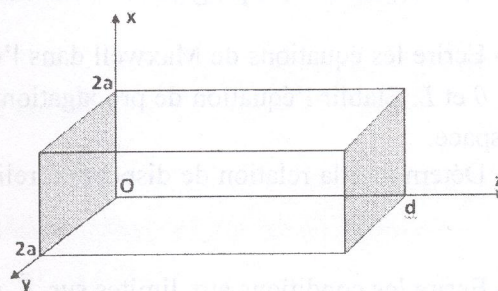


Figure 3

Où k_x , k_y et k_z sont les composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$.

Dans cette expression la dépendance temporelle a été omise. Notons que cette onde résulte d'une combinaison linéaire d'ondes planes.

24.1- Identifier les composantes tangentielles du champ $\vec{E}$ sur les interfaces $x=2a$, $y=2a$ et $z=d$. Montrer à l'aide des conditions aux limites sur $\vec{E}$ que les composantes de $\vec{k}$ s'écrivent :

$$k_x = m \frac{\pi}{2a}, \quad k_y = n \frac{\pi}{2a}, \quad k_z = q \frac{\pi}{d} \quad \text{avec } m, n \text{ et } q \text{ des entiers.}$$

24.2- Montrer que la fréquence des modes de résonance s'écrivent :

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2a}\right)^2 + \left(\frac{q}{d}\right)^2}$$

24.3- Déterminer la fréquence des modes longitudinaux (ondes se propageant suivant l'axe Oz). Déterminer la différence de fréquences $\Delta\nu$ entre deux modes longitudinaux successifs de cette cavité.

24.4- Pour une cavité laser, on peut choisir $d=0.3m$, $a=5cm$, et $q \approx 10^6$ alors que m et n ne dépassent pas quelques unités. En faisant un développement limité au premier ordre en déduire la nouvelle expression de ν_{mnq} .

Problème 4

Ce problème étudie le transfert thermique par conduction dans un cylindre d'axe Ox . On ne considère que le régime permanent.

25- Rappeler les formules donnant les grandeurs suivantes tout en précisant dans chaque cas les grandeurs intervenant dans ces formules ainsi que leur unité :

25.1- La densité de courant thermique dans le système de coordonnées cartésiennes suivant Ox .

25.2- Le flux thermique par conduction à travers une surface (S).

25.3- Le flux thermique échangé par convection entre une paroi solide et un fluide? Exprimer dans ce cas la résistance thermique R_{cv} par convection.

26- On considère un cylindre d'axe Ox de section S , de longueur L et de conductivité thermique λ . Dans cette question, on ne tient compte que de la conduction thermique suivant l'axe Ox .

26.1- Ecrire l'équation de la chaleur en régime permanent sans source interne.

26.2- Déterminer sa solution. On donne $T(x=0)=T_1$ et $T(x=L)=T_2 < T_1$.

26.3- Déterminer le flux thermique à travers la section du cylindre et en déduire l'expression de sa résistance thermique R_c .

27- Un barreau cylindrique d'axe Ox de section $S = 2\text{ cm}^2$ est constitué de deux barreaux de même sections soudés entre eux. L'un d'eux est en aluminium de conductivité thermique $\lambda_1 = 200$ (unité SI) et de longueur $L_1 = 80$ cm; l'autre est en cuivre de conductivité thermique $\lambda_2 = 380$ (unité SI) et de longueur $L_2 = 50$ cm. Les températures des extrémités libres du barreau d'aluminium et du barreau de cuivre sont respectivement $T_1 = 180$ °C et $T_2 = 0$ °C. Les faces latérales sont isolées.

27.1- Exprimer et calculer la résistance thermique R_T de l'ensemble de deux barreaux en fonction de L_1 , L_2 , S , λ_1 et λ_2 .

27.2- Déterminer la température T_j au niveau de la jonction des deux barreaux.

27.3- Calculer le gradient de température le long de chaque barreau. En déduire les densités de courant thermique correspondantes. Commenter.

27.4- Calculer la quantité de chaleur qui traverse la section commune de deux barreaux en une minute.

28- On considère deux barreaux cylindriques B_1 et B_2 de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 inconnues. Leur section commune est $S = 3\text{ cm}^2$, et leurs longueurs sont tels que $L_1 = 80$ cm et L_2 variable. L'équation d'évolution de la résistance totale R_T de deux barreaux en fonction de L_2 s'écrit :

$$R_T = 12,12 + 8,31 L_2 \quad \text{où } R_T \text{ est en } W^{-1}K \text{ et } L_2 \text{ en } m.$$

28.1- Déduire la résistance R_1 et la conductivité thermique λ_1 du barreau B_1 .

28.2- Calculer la conductivité λ_2 , et la résistance R_2 du barreau B_2 pour $L_2 = 50$ cm.

Fin de l'épreuve