

Concours Technologie
Correction de l'épreuve de Mathématiques

EXERCICE

1. Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$:

- La propriété est vraie pour $p = 0$ car $U^0 = I_n$ et $QV^0Q^{-1} = I_n$.
 - Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $U^p = QV^pQ^{-1}$. On a $U^{p+1} = U^pU = (QV^pQ^{-1})(QVQ^{-1}) = QV^p(Q^{-1}Q)VQ^{-1} = QV^pVQ^{-1} = QV^{p+1}Q^{-1}$.
- La récurrence est achevée.

2. • Il existe $Q \in GL_2(\mathbb{C})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $M = Q \operatorname{diag}(\lambda, \mu) Q^{-1}$. D'après 1), pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M^p = Q(\operatorname{diag}(\lambda, \mu))^p Q^{-1} = Q \operatorname{diag}(\lambda^p, \mu^p) Q^{-1}$.

• $\lim_{p \rightarrow +\infty} M^p = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \operatorname{diag}(\lambda^p, \mu^p) = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mu^p = 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$.

3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On pose : $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $N = T - \alpha I_2$.

(a) Un calcul simple donne $N^2 = 0$.

(b) Puisque I_2 et N commutent, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^p = (N + \alpha I_2)^p = \sum_{i=0}^p C_p^i N^i (\alpha I_2)^{p-i} = \sum_{i=0}^p C_p^i \alpha^{p-i} N^i. \text{ Comme } N^k = 0, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \\ \text{alors } T^p = \alpha^{p-0} N^0 + p \alpha^{p-1} N^1 = \alpha^p I_2 + p \alpha^{p-1} N.$$

(c) On a : $T^p = \begin{pmatrix} \alpha^p & p \alpha^{p-1} \beta \\ 0 & \alpha^p \end{pmatrix}$. Donc la suite $(T^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si les suites $(\alpha^p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(p \alpha^{p-1} \beta)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $|\alpha| < 1$ ou $(\beta = 0 \text{ et } \alpha = 1)$ si et seulement si $|\alpha| < 1$ ou $T = I_2$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable.

(a) Le polynôme caractéristique de M est de degré 2 et scindé dans $\mathbb{C}$, comme M est non diagonalisable, M admet une valeur propre double dans $\mathbb{C}$.

(b) Soit V_1 un vecteur propre associé à α_0 , on le complète en une base (V_1, V_2) de $\mathbb{C}^2$. Si Q est la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, on obtient

$$\text{alors : } M = Q \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

$$\operatorname{Tr}(M) = 2\alpha_0 \text{ donc } \gamma_0 = \alpha_0.$$

Si $\beta_0 = 0$, alors M est semblable à $\alpha_0 I_2$ donc $M = \alpha_0 I_2$ et par suite diagonalisable, ce qui est absurde, donc $\beta_0 \neq 0$.

(c) La suite $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $(T^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Puisque $\beta_0 \neq 0$, d'après 3)c), la suite $(T^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement

si $|\alpha_0| < 1$.

Dans le cas de convergence, la suite $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. On pose : $A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) On a : $A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ avec $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Par une récurrence sur p , et le calcul de produits de matrices définies par blocs, on

trouve : $A^0 = I_3$ et $A^p = \begin{pmatrix} \gamma^p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^p & p\alpha^{p-1}\beta \\ 0 & 0 & \alpha^p \end{pmatrix}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

(b) La suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ si et seulement si la suite $(\gamma^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$ et la suite $(T^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ si et seulement si $(|\gamma| < 1$ ou $\gamma = 1$) et $(T = I_2$ ou $|\alpha| < 1)$ si et seulement si $(|\gamma| < 1$ et $T = I_2)$ ou $(|\gamma| < 1$ et $|\alpha| < 1)$ ou $(\gamma = 1$ et $T = I_2)$ ou $(\gamma = 1$ et $|\alpha| < 1)$.

PROBLÈME

Partie I

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.

(a) • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(2tx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n t^n}{n!} x^n$, avec un rayon de convergence infini.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$, avec un rayon de convergence infini.

(b) • Ψ_t est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, comme étant la composée de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Psi_t^{(n)}(x) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t-x)$.

★ La propriété est vraie pour $n = 0$ car $\Psi_t^{(0)}(x) = \Psi_t(x)$ et $(-1)^0 \Phi^{(0)}(t-x) = \Psi_t(x)$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\Psi_t^{(n)}(x) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t-x)$. On a $\Psi_t^{(n+1)}(x) = [\Psi_t^{(n)}(x)]' = (-1)^n [\Phi^{(n)}(t-x)]' = (-1)^n (-1) \Phi^{(n+1)}(t-x) = (-1)^{n+1} \Phi^{(n+1)}(t-x)$.

La récurrence est achevée.

• En particulier, $\Psi_t^{(n)}(0) = (-1)^n \Phi^{(n)}(t)$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_t(x) = \Phi(t-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-(t-x)^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) \exp(2tx) \exp(-x^2) = \Phi(t) \exp(2tx) \exp(-x^2)$, donc Ψ_t est développable en série entière en $x = 0$ avec un rayon de convergence infini comme le produit de deux telles fonctions.

(d) Comme Ψ_t est développable en série entière en $x = 0$ avec un rayon de convergence infini, elle est égale à sa série de Taylor en 0.

(e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Psi_t^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Phi^{(n)}(t)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \Phi(t) H_n(t)}{n!} x^n$,

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{k!} x^k = \frac{\Psi_t(x)}{\Phi(t)} = \exp(2tx) \exp(-x^2) = G_t(x)$.

(f) Comme la fonction $x \mapsto G_t(x)$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver terme à terme.

(g) En dérivant la relation (1) par rapport à x , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2(t-x)G_t(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kH_k(t)}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Comme $\Phi^{(0)}(t) = \Phi(t)$ et $\Phi^{(1)}(t) = -2t\Phi(t)$, alors $H_0(t) = 1$ et $H_1(t) = 2t$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 2(t-x)G_t(x) &= 2(t-x) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k(t)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2tH_k(t)}{k!} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2H_k(t)}{k!} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2tH_k(t)}{k!} x^k - \\ &\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2H_{k-1}(t)}{(k-1)!} x^k = 2t + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)}{k!} \right] x^k = H_1(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)}{k!} \right] x^k \\ \text{et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k &= H_1(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k. \end{aligned}$$

$$\text{Il s'en suit que : } \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)}{k!} \right] x^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_{k+1}(t)}{k!} x^k.$$

Par identification, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)$.

(c) Posons $d_k = \deg(H_k)$ et a_k le coefficient dominant de H_k . Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $d_k = k$ et $a_k = 2^k$.

• La propriété est vraie pour $k = 0$ car $H_0 = 1$ donc $d_0 = 0$ et $a_0 = 1 = 2^0$.

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $d_k = k$ et $a_k = 2^k$. On a $H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)$ donc le coefficient dominant de H_{k+1} et son degré sont ceux de $2tH_k(t)$ et par suite $d_{k+1} = d_k + 1 = k + 1$ et $a_{k+1} = 2a_k = 2^{k+1}$.

La récurrence est achevée.

Partie II

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

(a) $(1+x^2)\Phi^{(k)}(x)P(x) = (-1)^k(1+x^2)H_k(x)P(x)\Phi(x) = (-1)^k(1+x^2)H_k(x)P(x)\exp(-x^2)$.

Comme $x \mapsto (-1)^k(1+x^2)H_k(x)P(x)$ est une fonction polynôme, alors

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (1+x^2)\Phi^{(k)}(x)P(x) = 0.$$

(b) $\Phi^{(k)}P$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\Phi^{(k)}(x)P(x) = o\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ quand $|x| \rightarrow +\infty$ donc $\Phi^{(k)}P$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) Une intégration par parties donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = [P(t)\Phi^{(k-1)}(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k-1)}(t)P'(t)dt.$$

Comme $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} P(t)\Phi^{(k-1)}(t) = 0$, on a bien le résultat.

2. (a) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k)}(t)dt$.

• La propriété est vraie pour $k = 0$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(0)}(t)P(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P(t)dt$ et

$$(-1)^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(0)}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P(t)dt.$$

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X], \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k)}(t)dt$.

D'après 1)c), $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k+1)}(t)P(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P'(t)dt$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(t)P'(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)(P')^{(k)}(t)dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k+1)}(t)dt$.
D'où : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k+1)}(t)P(t)dt = (-1)^{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)P^{(k+1)}(t)dt$ et la récurrence est achevée.

(b) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

i. $H_n H_m$ est une fonction polynôme, d'après 1)b) $H_n H_m \Phi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(t)H_m(t)\Phi(t)|dt$ existe et par suite l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt$ existe.

ii. • $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(t)\Phi^{(n)}(t)dt$ et d'après 2)a) de cette question, $\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t)\Phi^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(t)\Phi(t)dt$, d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(t)\Phi(t)dt.$$

• En échangeant les rôles de H_n et H_m , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(m)}(t)\Phi(t)dt.$$

(c) • Si $n < m$, $H_n^{(m)} = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = 0$.

• Si $m < n$, $H_m^{(n)} = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = 0$.

• Si $n = m$, $H_n^{(n)} = 2^n n!$ car H_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n . Il s'en suit que $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n! \Phi(t)dt = 2^n n!$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)dt = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $h_n(x) = H_n(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

★ $\forall t \in \mathbb{R}$, $h_n(t)h_m(t) = \sqrt{\pi} H_n(t)H_m(t)\Phi(t)$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)h_m(t)dt$ existe.

★ D'après 2)c) de cette partie, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)h_m(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \sqrt{\pi} 2^n n!, & \text{si } n = m. \end{cases}$

4. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq (|f(x)| - |g(x)|)^2 = f^2(x) + g^2(x) - 2|f(x)g(x)|$ donc $|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$.

(b) Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors d'après a) de cette question, fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) • C'est clair que la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est dans E donc $E \neq \emptyset$.

• Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(\lambda f + g)^2 = \lambda^2 f^2 + g^2 + 2\lambda fg$. Comme les fonctions $\lambda^2 f^2$, g^2 et $2\lambda fg$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour $(\lambda f + g)^2$ donc $(\lambda f + g) \in E$.

On en conclut que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et par suite E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

5. Pour tout $(f, g, h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

• $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$,

- $\langle \lambda f + g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$,
- $\langle f, f \rangle \geq 0$,
- $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ car la fonction f^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

6. (a) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $(h_0 P)^2 = P^2 \Phi$. Comme $x \mapsto P^2(x)$ est une fonction polynôme, d'après 1)b) de cette partie, $x \mapsto P^2(x) \Phi(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par suite $x \mapsto h_0(x) P(x)$ est dans E .

- (b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = h_0 H_n$ donc $h_n \in E$.

• La famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ d'après 3)b) de cette partie.

Il s'en suit que $(\frac{h_n}{\|h_n\|})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de E pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Partie III

1. (a) $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|h_0(t) \exp(i t x)| \leq |h_0(t)|$ et h_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $t \mapsto h_0(t) \exp(i t x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- (b) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\tilde{h}_0(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_0(t)| dt$, donc $\tilde{h}_0$ est bornée.

• $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_0(t) \exp(i t x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_0(t) \exp(i t x)$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

• $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|h_0(t) \exp(i t x)| \leq |h_0(t)|$ et $|h_0|$ est une fonction continue (donc continue par morceaux), positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Il s'en suit que $\tilde{h}_0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) • $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h_0(t) \exp(i t x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|h_0(t) \exp(i t x)| \leq h_0(t)$ et h_0 est positive continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

• $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h_0(t) \exp(i t x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial h_0}{\partial x}(x, t) = i t h_0(t) \exp(i t x)$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto i t h_0(t) \exp(i t x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

• $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|i t h_0(t) \exp(i t x)| \leq |t| h_0(t)$ et la fonction $t \mapsto |t| h_0(t)$ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$

Ainsi, $\tilde{h}_0$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{h}_0'(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t h_0(t) \exp(i t x) dt$.

- (b) • Posons $u(t) = i \exp(i t x)$ et $v'(t) = t h_0(t)$. On a : $u'(t) = -x \exp(i t x)$ et $v(t) = -h_0(t)$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0'(x) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} [\exp(i t x) h_0(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i t x) h_0(t) dt \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} [\exp(i t x) h_0(t)]_{-\infty}^{+\infty} - x \tilde{h}_0(x). \end{aligned}$$

Puisque $|\exp(i t x) h_0(t)| \leq h_0(t)$ et $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} h_0(t) = 0$, alors $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \exp(i t x) h_0(t) = 0$

et par suite $\tilde{h}_0'(x) + x \tilde{h}_0(x) = 0$.

• $\tilde{h}_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$. Le changement de variable $z = \frac{t}{\sqrt{2}}$ donne

$$\tilde{h}_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) dz = 1.$$

- (c) Les solutions de l'équation $y' + xy = 0$ sont de la forme $x \mapsto C \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. La condition initiale donne $C = 1$. Ainsi, $\tilde{h}_0 = h_0$.

Partie IV

Pour $(n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, on pose : $u_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x - 2n\pi)^2\right)$.

1. (a) $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} (1+n^2)u_n(x) = 0$ et $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} (1+n^2)u'_n(x) = 0$ donc $u_n(x) = o\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$ et $u'_n(x) = o\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$ quand $|n| \rightarrow +\infty$.

- (b) On a $u_n(x) = o\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$ et $u'_n(x) = o\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$ quand $|n| \rightarrow +\infty$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, (|n| \geq n_1 \Rightarrow |u_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2})$ et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, (|n| \geq n_2 \Rightarrow |u'_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2})$.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, (|n| \geq n_0 \Rightarrow |u_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2})$ et $(|n| \geq n_0 \Rightarrow |u'_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2})$.

Puisque la série $\sum_{|n| \geq n_0} \frac{1}{1+n^2}$ converge, les séries $\sum_{|n| \geq n_0} u_n$ et $\sum_{|n| \geq n_0} u'_n$ sont normalement convergentes sur $\mathbb{R}$.

- (c) • $\forall n \in \mathbb{Z}, u_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

• La série $\sum_{|n| \geq n_0} u_n$ est normalement convergente donc convergente sur $\mathbb{R}$.

• La série $\sum_{|n| \geq n_0} u'_n$ est normalement convergente et par suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la série $\sum_{|n| \geq n_0} u_n$ est bien définie et sa somme est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il s'en

suit que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n$ est bien définie et sa somme U est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, U(x+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x+2\pi-2n\pi)^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-2(n-1)\pi)^2\right)$.

En faisant le changement de variable $m = (n-1)$, on obtient : $U(x+2\pi) = U(x)$.

3. (a) Par convergence normale, $c_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(t) \exp(-i p t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(t) \right] \exp(-i p t) dt$
 $= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} u_n(t) \exp(-i p t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(t-2n\pi)^2\right) \exp(-i p t) dt$.

Le changement de variable $y = t - 2n\pi$ donne :

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{2(1-n)\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \exp(-i p y) \exp(-2i p n\pi) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \exp(-i p y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \exp(-i p y) dy \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{h}_0(-p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h_0(-p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h_0(p).$$

(b) U est 2π -périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sa série de Fourier complexe converge normalement vers U sur $\mathbb{R}$.

(c) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(i n x)$ donc

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - 2n\pi)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_0(n) \exp(i n x).$$

En faisant $x = 0$, on obtient : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-2n^2\pi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{2}\right).$