

Exercice : 10 points

1. • p_1 est la probabilité d'obtenir un 2 ou 4, donc $p_1 = \frac{2}{5}$.
 • p_2 est la probabilité d'obtenir au premier et au deuxième lancer un nombre pair ou obtenir au premier et deuxième lancer un nombre impair, donc $p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$.

2. • Soit $A_n =$ "la somme des résultats obtenues lors des n premiers lancers est paire".
 Il est évident que $\{A_n, \bar{A}_n\}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a : $p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/\bar{A}_n)P(\bar{A}_n) = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1-p_n)$.
 On a $p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$. L'équation $x = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ admet l'unique solution $x = \frac{1}{2}$. La suite $(q_n)_{n \geq 1}$ définie par $q_n = p_n - \frac{1}{2}$ est une suite géométrique de raison $\left(-\frac{1}{5}\right)$ et de premier terme $q_1 = -\frac{1}{10}$ donc, pour tout $n \geq 1$,
 $q_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Il s'en suit que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = q_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^n + 1 \right]$.
 • Comme $\left(-\frac{1}{5}\right) \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

3. (a) X prend ses valeurs sur $\mathbb{N}^*$ et l'événement $(X = k)$ est obtenir un 5 au k ème lancer et non 5 pour les $(k-1)$ premiers lancers, d'où : $P(X = k) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^k$.

(b) • $G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)t^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{4}{5}t}{1 - \frac{4}{5}t} = \frac{t}{5-4t}$.

• On a : $G'_X(t) = \frac{5}{(5-4t)^2}$ et $G''_X(t) = \frac{40}{(5-4t)^3}$, d'où :

* $E(X) = G'_X(1) = 5$.

* $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = 40 + 5 - 5^2 = 20$.

Problème 1 : 45 points

Partie I : 11 points

1. Pour tout $x > 0$, on pose : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

(a) Posons $u(t, x) = t^{x-1} e^{-t}$, $t > 0$ et $x > 0$.

• On a la fonction $t \mapsto u(t, x)$ est positive et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, $u(t, x) \sim t^{x-1}$ et

$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 u(t, x) = 0$. Comme $x > 0$ alors $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge et par suite $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$. De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$

converge donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ converge absolument. Par suite Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

• Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

★ $\forall x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto u(t, x)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

★ $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est continue sur $[a, b]$.

★ $\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times [a, b]$, $|u(t, x)| \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}, & \text{si } 0 < t < 1, \\ t^{b-1} e^{-t}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

φ est continue par morceaux positive sur $]0, +\infty[$. De plus, les intégrales $\int_0^1 t^{a-1} dt$ et $\int_1^{+\infty} t^{b-1} e^{-t} dt$ convergent, donc φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Il s'en suit que Γ est continue sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$ et par suite sur $]0, +\infty[$.

• $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto u(t, x)$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ donc $\Gamma(x) > 0$.

④

(b) • $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

• Une intégration par partie donne : $\forall x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

• Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

★ $\Gamma(1) = 1 = 0!$

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\Gamma(n+1) = n!$.

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

La récurrence est achevée.

②

2. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ tel que $a < b$ et $k \in \mathbb{N}$. On pose : $f_k(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1}, & \text{si } t \in]0, 1] \\ (\ln(t))^k t^{b-1} e^{-t}, & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$

(a) La fonction f_k est positive et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

De plus, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\frac{a}{2}} f_k(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{a}{2}} |\ln(t)|^k = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_k(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} |\ln(t)|^k t^{b+1} e^{-t} = 0$ donc

$\int_0^1 |\ln(t)|^k t^{a-1} dt$ converge et $\int_1^{+\infty} |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t} dt$ converge et par suite $\int_0^{+\infty} f_k(t) dt$ converge.

Ainsi, f_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

①

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.

★ On a déjà montré que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

★ $\forall t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto u(t, x)$ est de classe C^k sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t, x) = (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t}$.

★ $\forall x \in [a, b]$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t, x)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(t, x) \right| \leq f_k(t).$$

★ f_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Il s'en suit que Γ est de classe C^k sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt$.

On en conclut que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $(k, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

②

3. (a) On a : $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} |\Gamma'(x)| &\leq \int_0^{+\infty} |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} [t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}] [|\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}] dt \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} (\ln(t))^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\Gamma(x) \Gamma''(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x)$.

①

(b) On a : $\forall x > 0$ $\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right)'(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2} \geq 0$ alors la fonction $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

①

Partie II : 11 points

1. • $\forall x > 0, \Psi(x+1) = \frac{\Phi(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{x\Phi(x)}{x\Gamma(x)} = \Psi(x)$. Donc Ψ est 1-périodique sur $]0, +\infty[$.

• $\Psi(1) = \frac{\Phi(1)}{\Gamma(1)} = \Phi(1)$.

2. (a) $\Psi' = \frac{\Phi'\Gamma - \Phi\Gamma'}{\Gamma^2}$ donc $\frac{\Psi'}{\Psi} = \frac{\Gamma}{\Phi} \left[\frac{\Phi'\Gamma - \Phi\Gamma'}{\Gamma^2} \right] = \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{\Gamma'}{\Gamma}$.

(b) $\forall x > 0, \Phi'(x+1) = \Phi(x) + x\Phi'(x)$ donc $\frac{\Phi'(x+1)}{\Phi(x+1)} = \frac{\Phi(x) + x\Phi'(x)}{x\Phi(x)} = \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} + \frac{1}{x}$.

(c) De même, on a : $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$.

3. On pose : $\beta = \frac{\Psi'(1)}{\Psi(1)}$.

(a) On a : $\frac{\Psi'(x+n)}{\Psi(x+n)} = \frac{\Phi'(x+n)}{\Phi(x+n)} - \frac{\Gamma'(x+n)}{\Gamma(x+n)}$. Comme les fonctions $\frac{\Phi'}{\Phi}$ et $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ sont croissantes sur $]0, +\infty[$,
alors $\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} \leq \frac{\Phi'(x+n)}{\Phi(x+n)}$, $\frac{\Phi'(x+n)}{\Phi(x+n)} \leq \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)}$, $-\frac{\Gamma'(x+n)}{\Gamma(x+n)} \geq -\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}$, $-\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \geq -\frac{\Gamma'(x+n)}{\Gamma(x+n)}$.
D'où : $\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{\Psi'(x+n)}{\Psi(x+n)} \leq \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$.

(b) Avec $\frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} = \frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} + \frac{1}{n}$ et $\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + \frac{1}{n}$, on obtient $\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Psi'(n)}{\Psi(n)} - \frac{1}{n}$ et
 $\frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{\Psi'(n)}{\Psi(n)} + \frac{1}{n}$. On en déduit que : $\frac{\Psi'(n)}{\Psi(n)} - \frac{1}{n} \leq \frac{\Psi'(x+n)}{\Psi(x+n)} \leq \frac{\Psi'(n)}{\Psi(n)} + \frac{1}{n}$.

Enfin, puisque Ψ est 1-périodique, Ψ' est 1-périodique et donc $\frac{\Psi'}{\Psi}$ est 1-périodique. Il vient : pour tout $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\Psi'(n)}{\Psi(n)} = \beta$ et $\frac{\Psi'(x+n)}{\Psi(x+n)} = \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}$, d'où : $\beta - \frac{1}{n} \leq \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} \leq \beta + \frac{1}{n}$.

- (c) En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$ et en utilisant la 1-périodicité de Ψ , on obtient : $\forall x > 0, \Psi'(x) = \beta \Psi(x)$.
Par suite il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0, \Psi(x) = C \exp(\beta x)$.

①

- (d) • Comme $\Psi(x+1) = \Psi(x) \forall x > 0$, alors $\beta = 0$.
• $\forall x > 0, \Psi(x) = C = \Psi(1) = \Phi(1)$ donc $\Phi(x) = \Psi(x)\Gamma(x) = \Phi(1)\Gamma(x)$.

② 2

Partie III : 23 points

1. On a : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$. Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

①

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

- (a) On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ est convergente et la série $\sum_{n \geq 1} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente alors la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

① 3

- (b) La série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique convergente donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

① ①

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_1) = \gamma - 1$, et les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ sont convergentes donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma. \quad \textcircled{2}$$

4. On a $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)' = \frac{1}{(n+x)^2} \geq 0$ donc $\sup_{x \in [0, a]} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = \frac{a}{n(n+a)}$. Comme la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{n(n+a)}$ est convergente, alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ est normalement convergente sur $[0, a]$. $\textcircled{2}$

5. On pose, pour tout $x > 0$, $H(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

(a) ★ D'après 4) de cette partie, H est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

★ La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ converge pour $x = 1$.

★ La fonction $x \mapsto \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)' = \frac{1}{(n+x)^2}$.

★ $\forall x > 0$, $\frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+x)^2}$ converge normalement sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

On conclut que H est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$H'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}. \quad \textcircled{2}$$

(b) On a : $\forall x > 0$, $H'(x) \geq 0$ donc H est croissante sur $]0, +\infty[$. $\textcircled{1}$

(c) • $H(1) = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = -1 + 1 = 0.$

• Pour tout $x > 0$, $H(x+1) - H(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}.$

6. On pose : $\forall x > 0, M(x) = \int_1^x H(t) dt.$

(a) • La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur tout segment de $[0, +\infty[$ alors :

$$M(2) = \int_1^2 H(t) dt = \int_1^2 \left(-\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) \right) dt = -\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right)$$

Comme les deux séries numériques $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right)$ sont convergentes, alors :

$$\begin{aligned} M(2) &= -\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) \\ &= -\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= -\ln(2) + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma. \end{aligned}$$

• $M(x+1) = M(2) + \int_2^{x+1} H(t) dt = \gamma + \int_1^x H(t+1) dt = \gamma + \int_1^x \left(H(t) + \frac{1}{t} \right) dt = \gamma + M(x) + \ln(x).$

(b) Pour tout $x > 0$ fixé, $\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) = \frac{x^2}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$ alors la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)$ est convergente comme somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

(c) Comme la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right)$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$, alors, pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
M(x) &= -\gamma - \ln(x) + M(x+1) = -\gamma - \ln(x) + \int_1^{x+1} \left(-\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) \right) dt \\
&= -\gamma - \ln(x) - \ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right) \right) \\
&= -\gamma - \ln(x) - \ln(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1} + \frac{x}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right) \right)
\end{aligned}$$

Puisque, les séries numériques $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1} \right)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right) \right)$ sont convergentes, alors, on a :

$$\begin{aligned}
M(x) &= -\gamma - \ln(x) - \ln(x+1) + x \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right) \right) \\
&= -\gamma - \ln(x) - \ln(x+1) + x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right) \\
&= -\gamma - \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right).
\end{aligned}$$

②

7. On pose : $\forall x > 0, F(x) = \exp(-\gamma x + M(x))$.

(a) On a :

★ $\forall x \in]0, +\infty[, F(x) > 0$.

★, F est dérivable sur $]0, +\infty[$, comme étant la composée de deux fonctions dérivables.

★ $\forall x \in]0, +\infty[, F(x+1) = \exp(-\gamma(x+1) + M(x+1)) = \exp(-\gamma x - \gamma + M(x) + \gamma + \ln(x)) = x F(x)$.

★ $\forall x \in]0, +\infty[, \left(\frac{F'}{F} \right)'(x) = M''(x) = H'(x) \geq 0$ alors la fonction $\frac{F'}{F}$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

②

(b) La fonction F vérifie les hypothèses de la Partie II alors $\forall x > 0, F(x) = F(1) \Gamma(x) = e^{-\gamma} \Gamma(x)$.

①

- (c) • $\forall x > 0, \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{F'(x)}{F(x)} = -\gamma + H(x)$.
 • $\Gamma'(1) = \Gamma(1)(-\gamma + H(1)) = -\gamma$.

①

(d) En utilisant la continuité de la fonction exponentielle, on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
 \star \frac{1}{\Gamma(x)} &= \frac{e^{-\gamma}}{F(x)} = \exp(\gamma x - \gamma - M(x)) = \exp\left(\gamma x + \ln(x) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)\right) \\
 &= x \exp\left(\gamma x - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)\right) \\
 &= x \exp(\gamma x) \exp\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(-\frac{x}{k} + \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)\right)\right) \\
 &= x \exp(\gamma x) \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right). \\
 \star \frac{1}{\Gamma(x)} &= \exp(\gamma x) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!} \exp\left(-x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \right] \\
 &= \exp(\gamma x) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!} \exp\left(-x \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right) - x \ln(n)\right) \right] \\
 &= \exp(\gamma x) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n!} \exp(-\gamma x) \exp(-x \ln(n)) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{x(x+1)\dots(x+n)}{n! n^x} \right]
 \end{aligned}$$

Il s'en suit que : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

②

Problème 2 : 45 points

Partie I : 23 points

On considère le sous-espace $\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et les vecteurs $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$.

1. (a) • $X = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}w)^\perp \Leftrightarrow \langle X, w \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ainsi, $(\mathbb{R}w)^\perp = \mathcal{H}$.
 • $\mathbb{R}^3$ est euclidien donc $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}w)^\perp \oplus \mathbb{R}w = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}w$.

②

- (b) • D'après a), $\dim(\mathcal{H}) = 2$. De plus, u et v sont des éléments de $\mathcal{H}$ et u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est une base de $\mathcal{H}$.
 • (u, v) est une base de $\mathcal{H}$, (w) est une base de $\mathbb{R}w$ et $\mathbb{R}^3 = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}w$ donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

②

2. Soient A et D les matrices carrées d'ordre 3 définies par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) On vérifie que $Au = -u$, $Av = -v$ et $Aw = 2w$. Donc (u, v, w) est une base de vecteurs propres de A . ②

(b) • En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base (u, v, w) on obtient une base orthonormée $\mathcal{B}' = (u', v', w')$ de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$u' = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), v' = \frac{v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}u}{\left\|v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}u\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 - 2e_3), w' = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3).$$

• La matrice de passage P de la base orthonormée $\mathcal{B}$ à la base orthonormée $\mathcal{B}'$ est une matrice orthogonale et elle est donnée par : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

• Il est clair que $Au' = -u'$, $Av' = -v'$ et $Aw' = 2w'$ donc $A = PD^tP$. ④

3. On note p la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$. Soit $X \in \mathbb{R}^3$.

(a) On a : $X = Y + \lambda w \Leftrightarrow x_1 - \lambda = y_1, x_2 - \lambda = y_2$ et $x_3 - \lambda = y_3$.

On utilise le fait que $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ on trouve $\lambda = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, et par suite $y_1 = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}$,

$$y_2 = \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3} \text{ et } y_3 = \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3}. \quad ②$$

(b) Avec $p(Y) = Y$ et $p(w) = 0$, on obtient $p(X) = \left(\frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 + 2x_2 - x_3}{3}, \frac{-x_1 - x_2 + 2x_3}{3} \right)$. ①

(c) p est la projection sur $\mathcal{H}$ donc $\text{rg}(p) = \dim \mathcal{H} = 2$ et $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p) = 2$. ②

4. Soit $b = (4, 1, 1)$. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x_1, x_2) = \|\gamma - x_1 u - x_2 v\|^2$ et Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ donnée par $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = f(x_1, x_2)\}$.

(a) Le calcul donne : $f(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9)$.

①

(b) • f est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

• $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2(2x_1 + x_2 - 3)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2(x_1 + 2x_2 - 3)$.

②

(c) L'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 u + x_2 v$ est bijective. Il s'en suit que :

$$\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = \min_{X \in \mathcal{H}} \|b - X\|^2 = \|b - p(b)\|^2.$$

Avec $p(b) = (2, -1, -1)$, on obtient $\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = 12$.

Deuxième méthode :

si $\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$ existe en un point $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_1, y_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(y_1, y_2) = 0$, car $\mathbb{R}^2$ est un ouvert. Le calcul donne $(y_1, y_2) = (1, 1)$ et $f(1, 1) = 12$. Enfin, on montre que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1, x_2) - f(1, 1) = 2 \left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - 3) \right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 - 1)^2 \geq 0.$$

②

(d) • On a $f(1, 1) = 12$ donc le point $M(1, 1, 12) \in \Sigma$.

• Posons $g(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$.

$$\text{On a } \nabla g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla g(1, 1, 12) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'en suit que M est un point régulier de Σ .

• L'équation du plan tangent Π à Σ en M est : $0 \times (x_1 - 1) + 0 \times (x_2 - 1) + (-1) \times (x_3 - 12) = 0$, c'est à dire : $x_3 = 12$.

③

Partie II : 22 points

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non nulle vérifiant : $\begin{cases} \bullet \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} \in \{0,1\}, \\ \bullet \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} = 0. \end{cases}$

On pose : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$, et $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i)$.

1. A est une matrice symétrique réelle alors A admet une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$. ①

2. • Si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k = 0$ alors A est semblable à la matrice nulle et par suite A est nulle ce qui est absurde. Alors il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que : $\lambda_k \neq 0$.

• $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(A) = 0$.

• Si $\lambda_1 \geq 0$, alors $\lambda_k > 0$ et par suite $\text{Tr}(A) > 0$, ce qui est absurde. De même si $\lambda_n \leq 0$, alors $\lambda_k < 0$ et par suite $\text{Tr}(A) < 0$, ce qui est aussi absurde. On conclut que : $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. ③

3. Ecrivant $X = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. On a $Q(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Avec $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient :

$$\lambda_1 \|X\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq Q(X) \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|X\|^2.$$

①

4. On note : $\mathbb{S} = \{X \in \mathbb{R}^n / \|X\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

(a) Il est clair que $\mathbb{S}$ est un borné de $\mathbb{R}^n$. De plus $\mathbb{S}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $X \mapsto \|X\|$. ①

(b) • Q est continue sur $\mathbb{R}^n$ comme étant une fonction polynomiale.

• Q est continue sur le fermé borné $\mathbb{S}$ donc elle est bornée et atteint ses bornes. ①

- (c) • $Q(v_1) = {}^t v_1 A v_1 = \lambda_1 \|v_1\|^2 = \lambda_1$ et $Q(v_n) = {}^t v_n A v_n = \lambda_n \|v_n\|^2 = \lambda_n$.
 • $\forall X \in \mathbb{S}, \lambda_1 \leq Q(X) \leq \lambda_n$.
 • $\forall X \in \mathbb{S}, \lambda_1 \leq Q(X)$ donc $\lambda_1 \leq \min_{X \in \mathbb{S}} Q(X)$ et $\min_{X \in \mathbb{S}} Q(X) \leq Q(v_1) = \lambda_1$ car $v_1 \in \mathbb{S}$ donc $\lambda_1 = \min_{X \in \mathbb{S}} Q(X)$.
 • $\forall X \in \mathbb{S}, \lambda_n \geq Q(X)$ donc $\lambda_n \geq \max_{X \in \mathbb{S}} Q(X)$ et $\max_{X \in \mathbb{S}} Q(X) \geq Q(v_n) = \lambda_n$ car $v_n \in \mathbb{S}$ donc $\lambda_n = \max_{X \in \mathbb{S}} Q(X)$. (3)

5. (a) • $|Q(X)| \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \right) |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|X\| \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Avec $a_{i,j} = a_{i,j}^2$, on a $\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{i,j} |x_j| \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^2 \right) \leq \alpha \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^2 \right)$,

d'où $\left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| \right)^2 \right) \leq \alpha \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^2 \right) \right) = \alpha \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right) x_j^2 \right) \leq \alpha^2 \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) = \alpha^2 \|X\|^2$

et par suite $|Q(X)| \leq \alpha \|X\|^2$.

• Puisque $v_n \in \mathbb{S}$, on a $|Q(v_n)| = \lambda_n \leq \alpha$. (2)

(b) • On a $Q(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j x_i$ et $Q(|X|) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| |x_i|$ donc $|Q(X)| \leq Q(|X|)$.

• $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |Q(v_i)| = |\lambda_i| \leq Q(|v_i|) \leq \lambda_n \|v_i\|^2 = \lambda_n \|v_i\|^2 = \lambda_n$. (2)

6. Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$, la matrice définie par : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $P_n = \det(\lambda I_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_n .

(a) • Le développement suivant la première ligne donne : $\forall n \geq 2, P_{n+2}(\lambda) = \lambda P_{n+1}(\lambda) - \Delta_{n+1}(\lambda)$.

En développant suivant la première ligne, on montre que $\Delta_{n+1}(\lambda) = P_n(\lambda)$.

• Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

C'est évident que $P_2(2) = 3$ et $P_3(2) = 4$.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Supposons que $P_n(2) = n+1$ et $P_{n+1}(2) = n+2$.

On a $P_{n+2}(2) = 2P_{n+1}(2) - P_n(2) = n + 3$.

Deuxième méthode :

L'équation caractéristique de la suite $(P_n(2))_{n \geq 2}$ est $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$. Elle admet la racine double $r = 1$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \geq 2, P_n(2) = (a + bn) \times 1^n = a + bn$. Avec $P_2(2) = 3$ et $P_3(2) = 4$, on trouve $a = b = 1$ donc $P_n(2) = n + 1$. ③

(b) D'après les questions 5 et 6 de cette partie, pour toute valeur propre μ de la matrice A_n , on a : $|\mu| \leq \alpha = 2$ et d'après 7)(a) 2 n'est pas une valeur propre de la matrice A_n . D'où : $|\mu| < \alpha = 2$. ①

(c) On a $\frac{|\mu|}{2} < 1$ et la fonction $\cos$ est une bijection de $]0, \pi[$ sur $] -1, 1[$ donc il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que : $\mu = 2\cos(\theta_0)$. ①

(d) • Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ que $P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

On a $P_2(2\cos(\theta)) = 4\cos^2(\theta) - 1$ et $P_3(2\cos(\theta)) = 4\cos(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1)$.

On vérifie que $\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = 4\cos^2(\theta) - 1$ et $\frac{\sin(4\theta)}{\sin(\theta)} = P_3(2\cos(\theta))$.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Supposons que $P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ et $P_{n+1}(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)}$.

$$\begin{aligned} P_{n+2}(2\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)P_{n+1}(2\cos(\theta)) - P_n(2\cos(\theta)) = \frac{2\sin((n+2)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{\sin((n+2)\theta + \theta) + \sin((n+2)\theta - \theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((n+3)\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Deuxième méthode :

L'équation caractéristique de la suite $(P_n(2\cos(\theta)))_{n \geq 2}$ est $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$. Elle admet deux racines distinctes et conjuguées $r_1 = e^{i\theta}$ et $r_2 = e^{-i\theta}$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$\forall n \geq 2, P_n(2\cos(\theta)) = a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta)$.

Avec $P_2(2\cos(\theta)) = 4\cos^2(\theta) - 1$ et $P_3(2\cos(\theta)) = 4\cos(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1)$, on trouve $a = 1$

et $b = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ donc $P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

• Soit μ une valeur propre de A_n . D'après 7)c), il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que : $\mu = 2\cos(\theta_0)$. D'après ce qui précède de cette question, on a : $0 = P_n(2\cos(\theta_0)) = \frac{\sin((n+1)\theta_0)}{\sin(\theta_0)}$ donc $\sin((n+1)\theta_0) = 0$. Il existe

donc un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\theta_0 = \frac{k\pi}{n+1}$. Puisque $\theta_0 \in]0, \pi[$, alors $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Inversement, tout réel de la

forme $2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ est une valeur propre de A_n . On en conclut que : $Sp_{\mathbb{R}}(A_n) = \left\{ \frac{k\pi}{n+1}, 1 \leq k \leq n \right\}$. ③