



CONCOURS TECHNOLOGIE
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2017	Date: 25 mai 2017	Heure: 8H	Durée : 4 heures
--------------	-------------------	-----------	------------------

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé. Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice (2 points)

On lance un dé non truqué à cinq faces et on regarde le nombre inscrit sur sa face inférieure. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

- Calculer p_1 et p_2 .
- Montrer que la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ vérifie la relation de récurrence : $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n)$.
En déduire la valeur de p_n pour $n \geq 1$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
- On lance, maintenant, indéfiniment le dé et on appelle X le rang du premier 5 obtenu. On admet que X est une variable aléatoire réelle.
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Déterminer la fonction génératrice de X . En déduire l'espérance et la variance de X .

Problème 1 (9 points)

Partie I

1. Pour tout $x > 0$, on pose : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Montrer que Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.
- Vérifier que $\Gamma(1) = 1$ et que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On pose : $f_k(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^k t^{a-1}, & \text{si } t \in]0, 1], \\ (\ln(t))^k t^{b-1} e^{-t}, & \text{si } t \in]1, +\infty[. \end{cases}$

- Montrer que f_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$,

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $t \mapsto t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$ et $t \mapsto |\ln(t)| t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$, montrer que, pour tout $x > 0$, $(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x)$.
 - En déduire que la fonction $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

Partie II

Soit Φ une fonction définie sur $]0, +\infty[$, strictement positive et dérivable.

On suppose que $\Phi(x+1) = x\Phi(x)$, et que la fonction $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

On veut montrer que, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) = \Phi(1)\Gamma(x)$. Pour cela, on pose : $\Psi = \frac{\Phi}{\Gamma}$.

1. Montrer que Ψ est 1-périodique sur $]0, +\infty[$ et que $\Psi(1) = \Phi(1)$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$(a) \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} = \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad (b) \frac{\Phi'(x+1)}{\Phi(x+1)} = \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} + \frac{1}{x}, \quad (c) \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}.$$

3. On pose : $\beta = \frac{\Psi'(1)}{\Psi(1)}$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{\Psi'(x+n)}{\Psi(x+n)} \leq \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}.$$

(b) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\beta - \frac{1}{n} \leq \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} \leq \beta + \frac{1}{n}$.

(c) En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $\Psi(x) = C \exp(\beta x)$.

(d) Montrer que $\beta = 0$ et conclure.

Partie III

1. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est convergente et donner sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note : $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. En exprimant $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n)$ en fonction de γ , montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \gamma$.

4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ est normalement convergente sur $[0, a]$, pour tout $a > 0$.

5. On pose pour tout $x > 0$, $H(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

(a) Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et donner, pour $x > 0$, l'expression de $H'(x)$ sous forme d'une série.

(b) En déduire que H est croissante sur $]0, +\infty[$.

(c) Vérifier que $H(1) = 0$ et que, pour tout $x > 0$, $H(x+1) = H(x) + \frac{1}{x}$.

6. On pose pour tout $x > 0$, $M(x) = \int_1^x H(t) dt$.

(a) Montrer que $M(2) = \gamma$. En déduire que, pour tout $x > 0$, $M(x+1) = M(x) + \ln(x) + \gamma$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)$ converge.

- (c) En déduire que, pour tout $x > 0$, $M(x) = -\ln(x) - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)$.
7. On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \exp(-\gamma x + M(x))$.
- (a) Montrer que F vérifie les hypothèses de l'application Φ de la **Partie II**.
- (b) Déduire que, pour tout $x > 0$, $F(x) = e^{-\gamma} \Gamma(x)$.
- (c) Exprimer pour $x > 0$, $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ en fonction de $H(x)$. En déduire que : $\Gamma'(1) = -\gamma$.
- (d) Etablir les formules : pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \exp(\gamma x) \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k} \right) \exp \left(-\frac{x}{k} \right), \text{ puis } \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

Problème 2 (9 points)

Notations

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace euclidien des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients réels muni de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle X, Y \rangle = {}^t X Y, \text{ où } {}^t X \text{ est la transposée de } X.$$

- On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels.
- Un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à l'élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On note par $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^t A$ la matrice transposée de A et $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A .
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$.

On considère le sous-espace $\mathcal{H} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ et les vecteurs : $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$.

- (a) Montrer que : $(\mathbb{R}w)^\perp = \mathcal{H}$. En déduire que : $\mathbb{R}^3 = \mathcal{H} \oplus \mathbb{R}w$.
 - (b) Vérifier que $\{u, v\}$ est une base de $\mathcal{H}$. En déduire que $\{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- Soient A et D deux matrices carrées d'ordre 3 définies par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
 - (a) Vérifier que $\{u, v, w\}$ est une base de vecteurs propres de A .
 - (b) Déterminer une matrice orthogonale P telle que : $A = P D {}^t P$.
- On note p la projection orthogonale sur $\mathcal{H}$. Soit $X \in \mathbb{R}^3$.
 - (a) Déterminer l'unique vecteur $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H}$ et l'unique réel λ tels que : $X = Y + \lambda w$.
 - (b) En déduire l'expression de $p(X)$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
 - (c) Déterminer le rang et la trace de la projection orthogonale p .
- Soit $b = (4, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x_1, x_2) = \|b - x_1 u - x_2 v\|^2$ et Σ la surface de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = f(x_1, x_2)\}.$$

- (a) Vérifier que : $f(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 9)$.
- (b) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$.
- (c) Montrer que $\min_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$ existe et donner sa valeur.
- (d) Vérifier que $M = (1, 1, 12)$ est un point régulier de Σ et déterminer l'équation du plan Π tangent à Σ en ce point.

Partie II

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non nulle vérifiant :

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad \text{et} \quad a_{ii} = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On pose : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, et $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i)$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit : $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$ et $Q(X) = {}^t X A X$.

- Montrer que A admet une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres réelles de A rangées par ordre croissant, c'est à dire : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. On note $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base orthonormée de vecteurs propres, où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, v_i est le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_i .
- Montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que : $\lambda_k \neq 0$. Calculer $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ et en déduire que : $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.
- Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\lambda_1 \|X\|^2 \leq Q(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$.
- On note : $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \|X\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - Montrer que S est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - Montrer que Q est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que Q est bornée sur S et atteint ses bornes.
 - Calculer $Q(v_1)$ et $Q(v_n)$. En déduire que : $\lambda_1 = \min_{X \in S} Q(X)$ et $\lambda_n = \max_{X \in S} Q(X)$.
- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - Montrer que $|Q(X)| \leq \alpha \|X\|^2$ et en déduire que : $\lambda_n \leq \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i)$.
 - Comparer $|Q(X)|$ et $Q(|X|)$. En déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\lambda_i| \leq \lambda_n$.

- Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice définie par : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note $P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_n .

- Etablir que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$: $P_{n+2}(\lambda) = \lambda P_{n+1}(\lambda) - P_n(\lambda)$.
En déduire que : pour tout $n \geq 2$, $P_n(2) = n + 1$.
- Montrer que pour toute valeur propre μ de A_n , on a : $|\mu| < 2$.
- En déduire qu'il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que : $\mu = 2 \cos(\theta_0)$.
- Montrer que, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $P_n(2 \cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$. Déterminer alors : $\text{Sp}(A_n)$.

Fin de l'énoncé