



Concours Technologie Epreuve de Physique

Date : Lundi 29 Mai 2017	Heure : 8 H	Durée : 4 H	Nb pages : 08
Barème : Problème 1 : 8 pts	Problème 2 : 12 pts		

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données utiles

- La vitesse de la lumière dans le vide sera notée c . ϵ_0 et μ_0 désignent respectivement la permittivité électrique du vide et la perméabilité magnétique du vide. $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ désigne la constante de Planck réduite avec h la constante de Planck.
- OPPM : désignera une Onde Plane Progressive Monochromatique.
- Un point M de l'espace peut être repéré soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, soit par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- $\text{rot}(\text{rot} \vec{W}) = \text{grad}(\text{div} \vec{W}) - \Delta \vec{W}$.
- $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}^*$: désigne la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting où $\vec{B}^*$ désigne le complexe conjugué du champ magnétique.

Problème 1 : Quelques aspects de l'induction électromagnétique

I- Circuit magnétique et inductance mutuelle

On considère un solénoïde (Fig. 1) de rayon a d'axe (Oz) et de longueur infinie comportant n spires jointives circulaires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité i .

1. Déterminer à l'aide du théorème d'Ampère le champ magnétique créé par ce circuit en tout point de la région $r < a$. On admettra que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde et on se placera dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

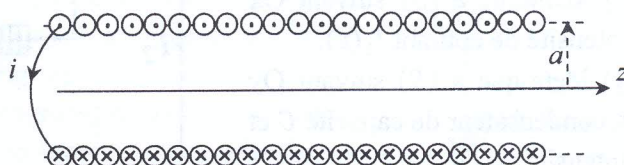


Figure 1

2. Ce solénoïde est supposé de longueur $l \gg a$, et possède N spires :

2.a. Exprimer la densité volumique d'énergie magnétique.

2.b. Déterminer par deux méthodes différentes son inductance propre L .

3. Soit deux solénoïdes S_1 et S_2 parcourus par des courants d'intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$, d'inductances propres respectives L_1 et L_2 et couplés par leur inductance mutuelle M (Fig. 2).

3.a. Ecrire les expressions des flux magnétiques Φ_1 et Φ_2 à travers S_1 et S_2 en fonction de i_1 , i_2 , L_1 , L_2 et M .

3.b. En déduire les forces électromotrices e_1 et e_2 à leurs bornes.

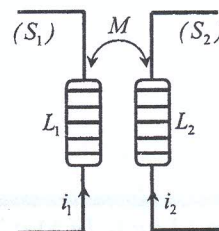


Figure 2

4. Dans un circuit alimenté par une force électromotrice e (Fig. 3), les solénoïdes S_1 et S_2 peuvent être branchés en série ou en parallèle.

4.a. Déterminer l'inductance équivalente L_e du circuit dans le cas où S_1 et S_2 sont montés en série (Fig. 3.a).

4.b. Même question lorsque S_1 et S_2 sont montés en parallèle (Fig. 3.b).

4.c. Commenter le cas où les deux solénoïdes sont sans interactions ?

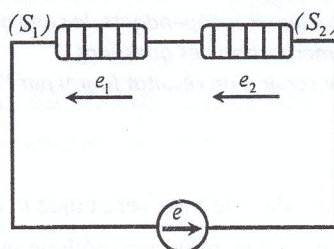


Figure 3.a

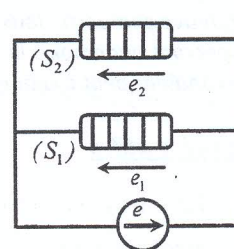


Figure 3.b

II- Champ tournant et principe du moteur synchrone

5. On considère maintenant un système (S) constitué de deux solénoïdes identiques de même axe Ox (Fig. 4.a) montés en série et parcourus par le même courant i dans le même sens.

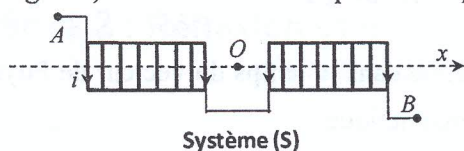
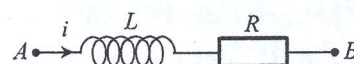


Figure 4.a



Système équivalent à (S)

Figure 4.b

On peut montrer que le champ magnétique créé au centre O par ce système peut se mettre sous la forme $\vec{B} = \beta i \vec{u}_x$ où β est un coefficient positif s'exprimant en fonction des paramètres géométriques de deux solénoïdes. Ce système possède une résistance électrique R et une inductance L . Son schéma électrique équivalent est donné à la figure 4.b.

On branche en parallèle (Fig. 5) entre les bornes d'une source de tension sinusoïdale idéale de pulsation ω_0 et de f.e.m complexe $\underline{u}(t) = U_0 e^{j\omega_0 t}$ ($j \in \mathbb{C}$ avec $j^2 = -1$) :

- un système (S_1) identique à (S) suivant Ox parcouru par l'intensité de courant $i_1(t)$.
- un système (S_2) identique à (S) suivant Oy en série avec un condensateur de capacité C et parcouru par l'intensité $i_2(t)$.

Les axes (Ox) de (S_1) et (Oy) de (S_2) se coupent perpendiculairement en O .

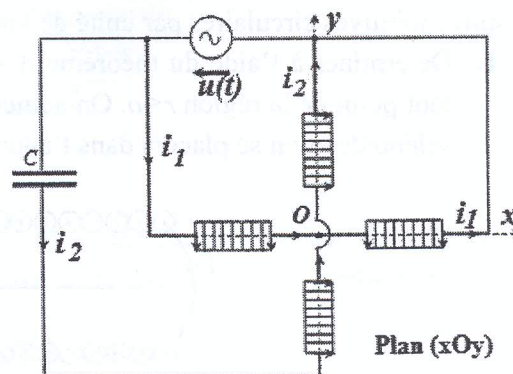


Figure 5

- 5.a. Donner le schéma électrique équivalent de ce circuit.
- 5.b. On cherche $i_1(t)$ et $i_2(t)$ de la forme : $i_1(t) = I_1 e^{j(\omega_0 t - \varphi_1)}$ et $i_2(t) = I_2 e^{j(\omega_0 t - \varphi_2)}$.
Exprimer l'intensité maximale I_1 et le déphasage φ_1 par rapport à la tension $u(t)$ en fonction de U_0 , R , L et ω_0 .
- 5.c. Exprimer de même l'intensité I_2 et le déphasage φ_2 en fonction de U_0 , R , C , L et ω_0 .
- 5.d. Dans quelles conditions peut-on avoir $I_1 = I_2$ et $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$? Pour répondre à cette question, on admet l'équivalence : $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \tan \varphi_1 \cdot \tan \varphi_2 = -1$.
- 5.e. Montrer alors que dans ces conditions L et C doivent vérifier : $L = \frac{R}{\omega_0}$ et $C = \frac{1}{2R\omega_0}$.
Déduire alors I_1 et I_2 en fonction de U_0 et R , ainsi que les valeurs de φ_1 et φ_2 .
- 5.f. On se place dans ces conditions, écrire dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et en notation réelle le champ magnétique total $\vec{B}$ en O créé par (S_1) et (S_2) . Exprimer son module, noté B_0 , en fonction de U_0 , β et R .
- 5.g. Justifier pour ce champ magnétique l'appellation de «champ tournant». Préciser sa vitesse angulaire dans le plan (xOy) .
6. Dans cette question on étudie le principe du moteur synchrone. Le champ tournant de la question précédente joue le rôle d'un champ inducteur agissant sur l'induit qui est un aimant permanent (Fig. 6).

Cet aimant est assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m}$ appartenant au plan (xOy) et faisant à l'instant $t = 0$ un angle α_0 avec le champ magnétique précédent $\vec{B}$ tournant autour de l'axe (Oz) . L'aimant tourne autour de cet axe à la pulsation ω .

- 6.a. L'angle instantané entre $\vec{B}$ et $\vec{m}$ est :

$$\alpha(t) = (\omega_0 - \omega)t + \alpha_0$$

Déterminer en fonction de m , B_0 , ω_0 , ω et α_0 l'expression du couple de force de Laplace $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ $\vec{B}$ sur l'aimant.

- 6.b. Pour quelle pulsation ω la moyenne temporelle de $\vec{\Gamma}$ est non nulle ? Justifier alors le nom donné à ce moteur.

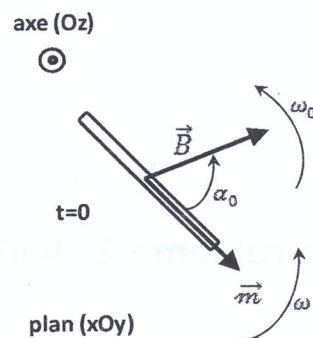


Figure 6

III- Principe du fluxmètre

Dans la suite, on considère deux solénoïdes S_1 et S_2 bobinés sur un même support cylindrique de longueur l , de section S et d'axe Oz . Le solénoïde S_1 comporte N_1 spires, alors que le solénoïde S_2 comporte N_2 spires avec $N_2 < N_1$.

Un générateur basse fréquence (GBF) générant une tension sinusoïdale de pulsation ω alimente un circuit comportant S_1 (supposé de longueur infinie) en série avec une résistance r . On mesure la tension V_2 aux bornes de S_2 (Fig. 7).

7. Exprimer le champ magnétique créé par S_1 en un point de son intérieur en fonction de μ_0 , N_1 , V_1 , r et l .

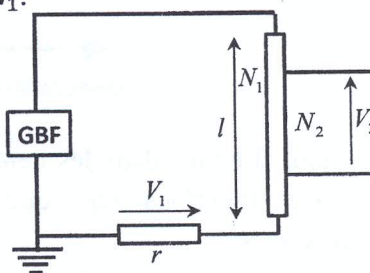


Figure 7

8. Déterminer l'expression du flux magnétique Φ à travers les N_2 spires de S_2 en fonction de μ_0 , N_1 , N_2 , S , V_1 , r et l .
9. Exprimer la force électromotrice (que l'on notera V_2) induite par S_2 en fonction de la dérivée de V_1 .

10. De quel type de circuit s'agit-il ? Comment le vérifier expérimentalement ?

11. On branche aux bornes de S_2 une résistance R en série avec une capacité C (Fig. 8). On mesure la tension aux bornes de cette capacité.

11.a. Exprimer la tension V_s en fonction de V_2 .

11.b. A quelle condition sur ω ce circuit RC est-il intégrateur ? Exprimer alors V_s en fonction de Φ .

11.c. Un fluxmètre est un capteur de flux du champ magnétique. Est-ce que cette étude permet d'expliquer le principe de ce capteur ? Justifier.

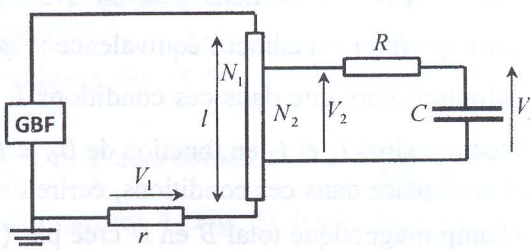
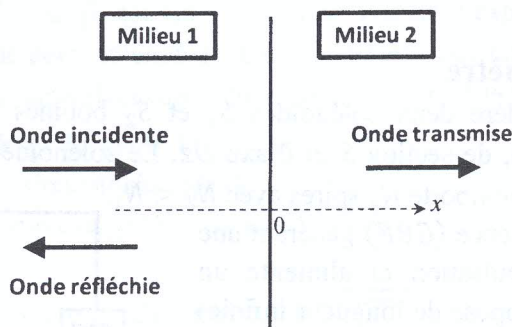


Figure 8

Problème 2 : Réflexion et transmission d'une onde à l'interface d'un milieu semi-infini

Preliminaires

On considère une onde plane rencontrant, en incidence normale, la surface d'un milieu semi-infini. La direction de propagation est suivant l'axe Ox et l'origine est placée à l'interface de deux milieux.



Les fonctions d'ondes dans les deux milieux 1 et 2 sont notées respectivement $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$. Ces fonctions ainsi que leur dérivée vérifient la condition de continuité sur l'interface $x = 0$:

$$\psi_1(0, t) = \psi_2(0, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(0, t)$$

A. Onde électromagnétique à l'interface vide-plasma

Dans le cas où la fonction d'onde est une onde plane électromagnétique polarisée rectilignement dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation, cette fonction représentera la composante du champ électrique dans cette direction.

I. OPPM dans le vide

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide (ϵ_0, μ_0) dépourvu de charges et de courants.
2. Dédire l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$.
3. En notation complexe, le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde s'écrit sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t - k_1 x)} \vec{u}_y \quad (i \in \mathbb{C} \text{ avec } i^2 = -1)$$

Etablir la relation de dispersion du milieu. Exprimer alors k_1 pour une propagation selon les x croissants.

II. Onde électromagnétique dans un milieu plasma

4. Propriétés du milieu

Un plasma est un milieu matériel globalement neutre, où les atomes sont partiellement ou totalement ionisés. Les électrons et les ions sont libres de se déplacer, on négligera l'effet de la pesanteur. Le plasma est suffisamment dilué pour négliger les interactions entre les particules chargées. Les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde.

Les densités volumiques des électrons et des ions ont une même valeur notée n_0 supposée constante. Les électrons sont non-relativistes : leur vitesse v est très faible devant celle de la lumière dans le vide ($v \ll c$).

On considère la propagation dans ce milieu d'une onde électromagnétique se propageant suivant Ox positif et donnée par son champ électrique :

$$\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t - k_2 x)} \vec{u}_y$$

E_0 et k_2 sont à priori des nombres complexes.

- 4.a. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.
- 4.b. Donner un argument justifiant que l'on puisse négliger le déplacement des ions devant celui des électrons.
- 4.c. A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, vérifier que la charge volumique totale reste nulle.
- 4.d. En notation complexe, appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans un référentiel galiléen à un électron du plasma de masse m et de charge $-e$.
En supposant pour cette question que le nombre d'onde k_2 est réel, comparer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique. Conclure.
- 4.e. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ de l'électron en fonction du champ électrique $\vec{E}$.
- 4.f. En exprimant la densité volumique $\vec{j}$ du courant dû aux électrons, déterminer la conductivité électrique complexe $\underline{\gamma}$ du milieu plasma.

- 4.g. Justifier que $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature de phase. Que peut-on dire de la puissance volumique moyenne transmise aux électrons de la part de l'onde ? Y a-t-il atténuation de l'onde au cours de la propagation ?

5. Relation de dispersion et comportement fréquentiel

- 5.a. A l'aide des équations de Maxwell dans le milieu plasma, établir l'équation de propagation du champ électrique.
- 5.b. Dédurre la relation de dispersion du milieu. On fera apparaître la pulsation plasma ω_p définie par $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$.
- 5.c. Montrer que le plasma se comporte comme un filtre passe haut pour les OPPM. Préciser alors la pulsation de coupure du filtre.

Cas où $\omega > \omega_p$

- 5.d. Exprimer le nombre d'onde k_2 et décrire la nature de l'onde ainsi obtenue.
- 5.e. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk_1}$.
- 5.f. Le plasma est-il dispersif ? Décrire son comportement lorsque $\omega \gg \omega_p$.

Cas où $\omega < \omega_p$

- 5.g. Montrer que k_2 est imaginaire pur et l'exprimer sous la forme $k_2 = i\rho$, où ρ est une grandeur à expliciter.
- 5.h. Exprimer alors le champ électrique de l'onde, quelle est la nature de l'onde ainsi obtenue ?

6. Indice complexe

L'indice complexe $\underline{n}$ d'un milieu peut être défini par la relation $k_2 = \underline{n} \frac{\omega}{c}$. Sa partie réelle n' s'appelle indice de réfraction, alors que sa partie imaginaire n'' s'appelle indice d'absorption. On pourra poser : $\underline{n} = n' + i n''$.

- 6.a. Exprimer le champ électrique de l'onde dans le plasma en fonction des indices n' et n'' .
- 6.b. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ en fonction de c et n' .
- 6.c. Justifier l'appellation « indice d'absorption » pour la partie imaginaire de $\underline{n}$.
- 6.d. Déterminer l'expression de l'indice complexe du plasma étudié précédemment, on distinguera les deux cas $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$. L'indice est-il toujours supérieur à 1 ?

III. Réflexion et transmission à l'interface vide - plasma

Un plasma occupe le demi espace $x > 0$, le demi-espace $x < 0$ étant le vide.

Une OPPM incidente de champ électrique $\vec{E}_i$ (ayant la même expression que celle fournie dans la partie I) se propageant dans le vide (milieu 1) selon l'axe Ox positif, arrive sous incidence normale sur le plasma décrit précédemment.

A l'interface $x = 0$, cette onde donnera naissance, selon les lois de Descartes, à une onde réfléchie dans le vide et à une autre onde transmise dans le plasma.

On supposera que ni la réflexion, ni la transmission ne modifie la pulsation et la polarisation de l'onde.

On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour le champ électrique.

7. Ecrire en notation complexe les champs électrique et magnétique incidents, réfléchis et transmis.
8. En écrivant la continuité du champ électrique et magnétique en $x = 0$, déduire $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction des nombres d'onde k_1 et k_2 dans les deux milieux.
9. En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T pour l'énergie. On les exprimera en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ et des nombres d'onde k_1 et k_2 .
10. Dans le cas où $\omega > \omega_p$, calculer R et T . Vérifier que $R + T = 1$ et conclure.
11. Dans le cas où $\omega < \omega_p$, calculer R et conclure.

B. Particule quantique libre et marche de potentiel

I. Particule quantique libre

Considérons une particule quantique libre, de masse m et de vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_x$ dans un espace unidimensionnel suivant la direction Ox .

Son énergie totale E se réduit alors à son énergie cinétique.

La fonction d'onde $\psi(x, t)$ associée à cette particule non relativiste obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

Une solution de cette équation décrivant un état stationnaire correspondant à un état d'énergie E se présente sous la forme :

$$\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

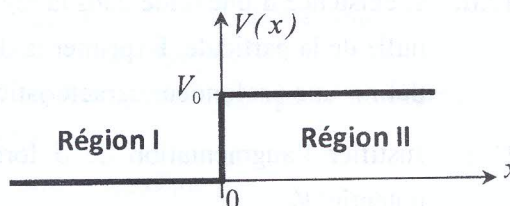
L'évolution temporelle d'une telle onde est régie par la pulsation $= \frac{E}{\hbar}$.

12. Déduire l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(x)$ appelée équation de Schrödinger indépendante du temps. On posera $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.
13. Donner la forme générale de $\varphi(x)$ solution de cette équation.
14. Déduire l'expression de la fonction d'onde $\psi(x, t)$ associée et l'interpréter.
15. Donner la relation de dispersion reliant ω à k_1 et déduire la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k_1}$ ainsi que la vitesse de groupe v_g .

II. Evolution d'une particule quantique en présence d'une marche de potentiel

On étudie le mouvement d'une particule quantique dans une énergie potentielle $V(x)$ sous la forme d'une marche de potentiel définie par :

$$\begin{array}{ll} V(x < 0) = 0 & \text{région I} \\ V(x > 0) = V_0 > 0 & \text{région II} \end{array}$$



On rappelle l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m dans l'énergie potentielle $V(x)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t)$$

16. On considère le cas d'une particule quantique incidente d'énergie $E > V_0$

- 16.a. Montrer que dans la région I un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde : $\varphi_1(x) = A e^{ik_1x} + \underline{r} A e^{-ik_1x}$ où A est une constante et $\underline{r}$ est le coefficient de réflexion pour l'amplitude en $x = 0$.
- 16.b. De même dans la région II, montrer qu'on pourra se contenter seulement de : $\varphi_2(x) = \underline{t} A e^{ik_2x}$ où $\underline{t}$ est le coefficient de transmission pour l'amplitude en $x = 0$ et k_2 est le nombre d'onde relatif à la région II que l'on explicitera.
- 16.c. Ecrire les deux relations de continuité à l'interface $x = 0$.
- 16.d. Dédire les expressions des coefficients $\underline{r}$ et $\underline{t}$.
- 16.e. Interpréter le déphasage des ondes réfléchi et transmise par rapport à celle incidente.

On définit les vecteurs densité de courant de probabilité associés aux ondes incidente, réfléchi et transmise par :

$$\vec{j}_i = |\psi_i|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x \quad \vec{j}_r = -|\psi_r|^2 \frac{\hbar k_1}{m} \vec{u}_x \quad \vec{j}_t = |\psi_t|^2 \frac{\hbar k_2}{m} \vec{u}_x$$

ψ_i , ψ_r et ψ_t sont respectivement les fonctions d'onde associées aux ondes incidente, réfléchi et transmise.

- 16.f. Déterminer les coefficients R et T exprimant les probabilités pour que la particule soit réfléchi ou transmise. Ces coefficients sont définis par :

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|}$$

- 16.g. Vérifier alors que $R + T = 1$. Que traduit cette relation ?
- 16.h. Y a-t-il une analogie possible de cette situation avec l'interface vide-plasma dans le cas de l'onde électromagnétique ?

17. On considère le cas d'une particule quantique incidente d'énergie $E < V_0$

- 17.a. La solution obtenue précédemment relative à la région I peut être conservée. Par contre, expliquer comment est modifié k_2 et par suite le coefficient $\underline{r}$.
- 17.b. Déterminer alors le coefficient R donnant la probabilité pour que la particule soit réfléchi. Commenter.
- 17.c. Y a-t-il une analogie possible de cette situation avec l'interface vide-plasma dans le cas de l'onde électromagnétique ?
- 17.d. L'existence d'une onde dans la région II laisse prévoir une probabilité de présence non nulle de la particule. Exprimer la densité de probabilité associée et montrer qu'on peut définir une profondeur caractéristique de pénétration $\delta = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0-E)}}$.
- 17.e. Justifier l'augmentation de δ lorsque l'énergie E de la particule se rapproche du potentiel V_0 .

Fin de l'épreuve