

### Problème 1 : 13 pts

#### Partie I

1. L'application :  $t \mapsto P(t) \exp(-t^2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} t^2 P(t) \exp(-t^2) = 0$  donc les intégrales

$\int_{-\infty}^0 P(t) \exp(-t^2) dt$  et  $\int_0^{+\infty} P(t) \exp(-t^2) dt$  sont convergentes et par suite, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \exp(-t^2) dt$  est convergente.

2. (a) Si  $x \geq 0$ , alors  $e^x \geq 1 \Rightarrow \int_0^x e^x dx \geq \int_0^x 1 dx \Rightarrow e^u - 1 \geq u$ .

Si  $x \leq 0$ , alors  $e^x \leq 1 \Rightarrow \int_x^0 e^x dx \leq \int_x^0 1 dx \Rightarrow 1 - e^u \leq -u \Rightarrow e^u - 1 \geq u$ .

Par conséquent,  $\forall u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u$ .

**Remarque :** on peut étudier le sens de variation sur  $\mathbb{R}$  de la fonction :  $u \mapsto e^u - u - 1$ .

- (b) On a d'après (a),  $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t^2) \geq 1 + t^2 \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} \geq \exp(-t^2)$ .

On a aussi  $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(-t^2) \geq (1 - t^2)$ . On en déduit :  $(1 - t^2) \leq \exp(-t^2) \leq \frac{1}{1+t^2}$ .

3. (a)  $\forall t \in [0, 1], (1 - t^2)^n \leq \exp(-nt^2)$  donc  $\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \int_0^1 \exp(-nt^2) dt$ .

$\forall t \in [0, +\infty[, \exp(-nt^2) \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$  donc  $\int_0^{+\infty} \exp(-nt^2) dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

Enfin, puisque  $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(-nt^2) \geq 0$ , on a  $\int_0^1 \exp(-nt^2) dt \leq \int_0^{+\infty} \exp(-nt^2) dt$ .

D'où la conclusion.

- (b) Le changement de variable  $t = \sin(u)$  donne :  $\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u) du$ .

Le changement de variable  $u = \sqrt{n} t$  donne :  $\int_0^{+\infty} \exp(-nt^2) dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ .

Le changement de variable  $t = \tan(u)$  donne :  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u) du$ .

On obtient alors :  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u) du \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u) du$ .

- (c) En utilisant le fait que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(u) du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$  et  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(u) du \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ , par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

- (d) • La fonction  $t \mapsto \exp(-t^2)$  est paire sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$ .

• Le changement de variable  $u = t^2$  donne  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$ .

• Une intégration par parties donne :  $\int_0^{+\infty} \frac{(1 - e^{-u})}{u\sqrt{u}} du = \left[ \frac{2(e^{-u} - 1)}{\sqrt{u}} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{\pi}$ .

#### Partie II

1. • C'est évident que  $\Phi$  est symétrique.

•  $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \Phi(\lambda P + Q) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q)$  par linéarité de l'intégrale.

•  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P, P) \geq 0$ .

•  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P, P) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t) \exp(-t^2) dt = 0$ . Comme la fonction  $t \mapsto P^2(t) \exp(-t^2)$  est continue et positive et la fonction  $t \mapsto \exp(-t^2)$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ , alors  $P^2 = 0$  et par suite  $P = 0$ .  
Il s'en suit  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

2. • L'application  $t \mapsto t^{2n+1} \exp(-t^2)$  est impaire sur  $\mathbb{R}$  donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} \exp(-t^2) dt = 0$ .

• Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2} \exp(-t^2) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1} (t \exp(-t^2)) dt = -\frac{1}{2} [t^{2n+1} \exp(-t^2)]_{-\infty}^{+\infty} \\ &+ \frac{(2n+1)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2) dt = \frac{(2n+1)}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2) dt \end{aligned}$$

3. (a) D'après 2) de cette partie, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \exp(-t^2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp(-t^2) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{et } \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \exp(-t^2) dt = \frac{3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp(-t^2) dt = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

$$\text{On développe } (t^2 - xt - y)^2 = t^4 - 2xt^3 + (x^2 - 2y)t^2 + 2xyt + y^2.$$

$$\text{Le calcul donne : } \Gamma(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x^2 - y + y^2.$$

(b) On a :  $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, y) = x$  et  $\frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x, y) = 2y - 1$ .

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = \frac{1}{2}.$$

$\Gamma$  admet  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  comme point critique.

(c) •  $\Gamma$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $r = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, y) = 1$ ,  $t = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}(x, y) = 2$  et  $s = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ .

En  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ , on a  $r = 1 > 0$  et  $rt - s^2 = 2 > 0$  donc  $\Gamma$  admet  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  comme minimum local.

$$\bullet \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2\Gamma(x, y) = x^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1.$$

$$\bullet \Gamma(x, y) - \Gamma\left(0, \frac{1}{2}\right) = \Gamma(x, y) - \frac{1}{2} \geq 0 \text{ donc } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ est un maximum absolu de } \Gamma.$$

(d) Notons  $\|\cdot\|$  la norme associée au produit scalaire  $\Phi$ . Comme l'application :  $(x, y) \mapsto xX + y$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}_1[X]$ , on a :

$$\frac{1}{2} = \min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \Gamma(x, y) = \min_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (xX + y)\|^2 = \min_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = (d(X^2, \mathbb{R}_1[X]))^2.$$

$$\text{Ainsi, } d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

### Partie III

1. • La fonction  $\cos$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , d'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \cos(\theta t)$ , ce qui donne :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad |1 - \cos(t)| \leq \frac{t^2}{2}$ .

Remarque : On peut utiliser l'égalité  $(1 - \cos(t)) = 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$  et l'inégalité  $|\sin(t)| \leq |t|$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\bullet \forall t \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1 + |\cos(t)|}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}.$$



2. •  $\forall x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{(1 - \cos(xt))}{t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(xt))}{t^2} = \frac{x^2}{2}$  donc la fonction  $t \mapsto \frac{(1 - \cos(xt))}{t^2}$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ . Pour tout  $t \geq 1$ ,  $\frac{(1 - \cos(xt))}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$  et la fonction  $t \mapsto \frac{2}{t^2}$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Il s'en suit que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  existe.
- Pour  $x = 0$ , on a  $f(0) = 0 = f(1)|0|$ . Pour  $x \neq 0$ , comme la fonction  $\cos$  est paire, on a  $\cos(tx) = \cos(t|x|)$ . Avec le changement de variable  $u = t|x|$ , on obtient  $f(x) = |x| \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(t))}{t^2} dt = f(1)|x|$ .

3. ★ Posons :  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ ,  $u(x, t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$ .

•  $\forall x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto u(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

•  $\forall t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto u(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

•  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ ,  $|u(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est positive, continue et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\star \forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |u(x, t)| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\star F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4. La solution générale sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation homogène  $y'' - y = 0$  est de la forme  $x \mapsto ae^x + be^{-x}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . De plus, la fonction  $x \mapsto f(1)x - \frac{\pi}{2}$  est une solution particulière de l'équation (E). Ainsi, la solution générale sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle (E) est de la forme  $x \mapsto ae^x + be^{-x} + f(1)x - \frac{\pi}{2}$ .

5. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(tx))}{t^2(1+t^2)} dt$ .

- (a) •  $\forall x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{(1 - \cos(tx))}{t^2(1+t^2)}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(tx))}{t^2(1+t^2)} = \frac{x^2}{2}$  donc

la fonction  $t \mapsto \frac{(1 - \cos(tx))}{t^2(1+t^2)}$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ . Pour tout  $t \geq 1$ ,

$$\frac{(1 - \cos(tx))}{t^2(1+t^2)} \leq \frac{2}{t^2} \text{ et la fonction } t \mapsto \frac{2}{t^2} \text{ est positive, continue par morceaux et intégrable sur } [1, +\infty[.$$

Il s'en suit que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x)$  existe.

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}, F(0) - F(x) + G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(xt))}{t^2} dt = f(1)|x|.$$

- (b) ★ Posons :  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,  $v(x, t) = \frac{(1 - \cos(tx))}{t^2(1+t^2)}$ .

•  $\forall x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto v(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  car elle est positive, continue par morceaux et  $\int_0^{+\infty} v(x, t) dt$  existe.

•  $\forall t \in ]0, +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto v(x, t)$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$  et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)}.$$

•  $\forall x \in \mathbb{R}$ , les fonctions  $t \mapsto \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t)$  sont continues par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

•  $\forall x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right|$  est positive et continue sur  $]0, +\infty[$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right| = |x|$  donc elle

se prolonge en une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $\forall t \geq 1$ ,  $\left| \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{t^2}$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Il s'en suit que la fonction  $t \mapsto \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

•  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\left| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

D'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale,  $G$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt = F(x).$$

(c) D'après 5)b) de cette partie, on a :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{\pi}{2} - G''(x) + G(x) = f(1)x$ . Il s'en suit que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$G''(x) - G(x) = \frac{\pi}{2} - f(1)x. \text{ Ainsi, } G \text{ est solution de (E) sur } \mathbb{R}_+^*.$$

(d) D'après la question 4) de cette partie, il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $F(x) = G''(x) = ae^x + be^{-x}$ . On a donc  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $|a| \leq e^{-x}|F(x)| + |b|e^{-2x}$ . Puisque  $F$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+^*$ , en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on obtient  $a = 0$ . Puisque  $F$  est paire, on a  $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$ ,  $F(x) = be^x$ . Enfin, puisque  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $F(0) = \frac{\pi}{2}$ , on a  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$ .

(e) On a  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$  donc  $G'(0) = 0$ .

Or,  $\forall x > 0$ ,  $G'(x) = -\frac{\pi}{2}e^{-x} + f(1)$  et  $G$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , donc  $G'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G'(x) = f(1) - \frac{\pi}{2}$ .

Il s'en suit que :  $f(1) = \frac{\pi}{2}$ .

## Partie IV

1. • La fonction  $t \mapsto \frac{(1 - \cos^n(t))}{t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n}{t^2} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - \left(1 - n \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)}{t^2} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{n}{2} + o(1) \right).$$

Il s'en suit que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^n(t))}{t^2} = \frac{n}{2}$  donc la fonction  $t \mapsto \frac{(1 - \cos^n(t))}{t^2}$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, 1]$ . De plus,  $\forall t \geq 1$ ,  $\left| \frac{(1 - \cos^n(t))}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$  et la fonction  $t \mapsto \frac{2}{t^2}$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Il s'en suit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bien définie.

• D'après la question 5)e) de la partie III, on a  $u_1 = \frac{\pi}{2}$ .

$$u_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos^2(t))}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(2t))}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Le changement de variable  $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$  donne  $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n$ .

(b) On a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $(1 - \cos^n(t)) = (1 - \cos(t)) \sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(t)$  donc en utilisant la question 1) de

la partie III,  $|1 - \cos^n(t)| \leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} |\cos^k(t)| \right) |1 - \cos(t)| \leq n \frac{t^2}{2}$ .



donc  $E(\sin(T)) = 0$ .

• On a  $\cos(S+T) = \cos(S)\cos(T) - \sin(S)\sin(T)$ . Puisque les variables aléatoires  $S$  et  $T$  sont finies et indépendantes,  $\cos(S)$ ,  $\cos(T)$ ,  $\sin(S)$  et  $\sin(T)$  le sont aussi. Par linéarité de l'espérance, il vient que  $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T)) - E(\sin(S))E(\sin(T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$ .

3. (a) On raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  :

•  $E(\cos(tS_1)) = E(\cos(tX_1)) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(-t) = \cos(t)$ . La propriété est vraie pour  $n = 1$ .

• Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre  $n$  et montrons qu'elle est vraie pour  $(n+1)$  : On a  $E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n + tX_{n+1}))$ . Or les variables aléatoires  $tS_n$  et  $tX_{n+1}$  sont finies et indépendantes. De plus, par définition de la loi de la variable aléatoire  $X_{n+1}$ , les variables aléatoires  $tX_{n+1}$  et  $t(-X_{n+1})$  ont même loi. On déduit du résultat de 2) que :

$$E(\cos(tS_{n+1})) = E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_{n+1})) = \cos^n(t)\cos(t) = \cos^{n+1}(t).$$

La récurrence est donc achevée.

(b) D'après le théorème de transfert,  $|S_n|$  admet une espérance et  $E(|S_n|) = \sum_{k \in S_n(\Omega)} |k|P(S_n = k)$ .

$$\text{Comme } \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(kt))}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}|k|, \text{ on a } E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k) \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(kt))}{t^2} dt.$$

L'ensemble  $S_n(\Omega)$  étant fini, on obtient par linéarité de l'intégrale

$$E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left( \sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k) \frac{(1 - \cos(kt))}{t^2} \right) dt.$$

Or,  $\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k) = 1$  et  $\sum_{k \in S_n(\Omega)} P(S_n = k) \cos(kt) = E(\cos(tS_n))$  d'après le théorème de transfert.

$$\text{Par conséquent, } E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - E(\cos(tS_n)))}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos^n(t))}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} u_n.$$

4. (a) Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $S_{2n+1}(\omega) = 2n+1 - 2s$  avec  $s \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $(S_{2n+1}(\omega) = 0 \Leftrightarrow 2n+1 - 2s = 0)$ , ce qui est impossible. Ainsi, l'événement  $(S_{2n+1} = 0)$  est impossible et  $P(S_{2n+1} = 0) = 0$ .

(b) En remarquant que  $(S_n(\Omega), \llbracket -n, n \rrbracket \setminus S_n(\Omega))$  forme une partition de  $\llbracket -n, n \rrbracket$  et lorsque  $j \in \llbracket -n, n \rrbracket \setminus S_n(\Omega)$ , on a  $P(S_n = j) = 0$ . Il vient :

$$\sum_{j=-n}^n |j|P(S_n = j) = \sum_{j \in S_n(\Omega)} |j|P(S_n = j) + \sum_{j \in \llbracket -n, n \rrbracket \setminus S_n(\Omega)} |j|P(S_n = j) = E(|S_n|).$$

... (c) • Les événements  $(S_{2n+1} = j+1)$  et  $(X_{2n+2} = -1)$  sont indépendants, donc

$$\begin{aligned} P((S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = -1)) &= P((S_{2n+1} = j+1) \cap (X_{2n+2} = -1)) \\ &= P((S_{2n+1} = j+1))P((X_{2n+2} = -1)) \\ &= \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j+1)). \end{aligned}$$

• Les événements  $(S_{2n+1} = j-1)$  et  $(X_{2n+2} = 1)$  sont indépendants, donc

$$\begin{aligned} P((S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = 1)) &= P((S_{2n+1} = j-1) \cap (X_{2n+2} = 1)) \\ &= P((S_{2n+1} = j-1))P((X_{2n+2} = 1)) \\ &= \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j-1)). \end{aligned}$$

(d) La famille  $((X_{2n+2} = 1), (X_{2n+2} = -1))$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ . D'après la formule des probabilités totales, pour tout  $j \in \llbracket -2n-2, 2n+2 \rrbracket$ , on a :

$$\begin{aligned} P(S_{2n+2} = j) &= P((S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = -1) \cup (S_{2n+2} = j) \cap (X_{2n+2} = 1)) \\ &= P((S_{2n+1} = j+1) \cap (X_{2n+2} = -1)) + P((S_{2n+1} = j-1) \cap (X_{2n+2} = 1)) \\ &= \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j+1)) + \frac{1}{2}P((S_{2n+1} = j-1)) \end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
 E(|S_{2n+2}|) &= \sum_{j=-2n-2}^{2n+2} |j|P(S_{2n+2}=j) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=-2n-2}^{2n+2} |j|P(S_{2n+1}=j+1) + \sum_{j=-2n-2}^{2n+2} |j|P(S_{2n+1}=j-1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=-2n-1}^{2n+1} (|k-1| + |k+1|)P(S_{2n+1}=k)
 \end{aligned}$$

(e) Comme  $P(S_{2n+1}=0)=0$ , on a :

$$\begin{aligned}
 E(|S_{2n+2}|) &= \frac{1}{2} \sum_{j=-2n-1}^{2n+1} (|k-1| + |k+1|)P(S_{2n+1}=k) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=-2n-1}^{-1} (|k-1| + |k+1|)P(S_{2n+1}=k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n+1} (|k-1| + |k+1|)P(S_{2n+1}=k) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=-1}^{2n+1} (-2k)P(S_{2n+1}=k) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n+1} 2kP(S_{2n+1}=k) = \sum_{j=-2n-1}^{2n+1} |k|P(S_{2n+1}=k) \\
 &= E(|S_{2n+1}|)
 \end{aligned}$$

On en déduit que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = u_{2n+1}$ .

## Problème 2 : 7 pts

### Partie I

1. Soit  $f \in O(\mathbb{R}^n)$

- (a) Soit  $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(f)$  et  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ . On a  $x \neq 0$  et  $f(x) = \lambda x$ . Comme  $f \in O(\mathbb{R}^n)$ , on a :  $\|x\| = \|f(x)\| = |\lambda| \|x\|$  donc  $|\lambda| = 1$ .
- (b) Supposons  $F$  est stable par  $f$  et soit  $(x, y) \in F \times f(F^\perp)$ . Il existe  $y' \in F^\perp$  tel que  $y = f(y')$ . Puisque  $f \in O(\mathbb{R}^n)$  et  $F$  est stable par  $f$ ,  $f_F$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$  est une isométrie de  $F$ , donc  $f_F$  est une bijection de  $F$  et par suite, il existe  $x' \in F$  tel que  $x = f(x')$ . On a maintenant  $\langle x, y \rangle = \langle f(x'), f(y') \rangle = \langle x', y' \rangle = 0$  car  $y' \in F^\perp$  et  $x' \in F$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in F$  et  $y \in f(F^\perp)$ , donc  $f(F^\perp) \subset F^\perp$ .

2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On pose  $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

- (a) On vérifie facilement que  ${}^t R_\theta R_\theta = I_3$  et  $\det(R_\theta) = 1$  donc  $R_\theta \in SO_3(\mathbb{R})$ .
- (b) •  $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ .  
 • Par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$ ,  $R_\theta^p = R_{p\theta}$ .  
 • Soit  $p \in \mathbb{Z}^*$ . On pose  $m = -p \in \mathbb{N}^*$ .  
 Puisque  $R_\theta R_{-\theta} = R_0 = I_3$ , on a  $R_\theta^p = R_\theta^{-m} = (R_\theta^{-1})^m = R_{-\theta}^m = R_{-m\theta} = R_{p\theta}$ .
- (c) • Dans  $\mathbb{C}$ ,  $P_{R_\theta}(X) = (X-1)(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ . On a  $e^{i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z}$ . Ainsi :  
 Si  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $R_\theta = I_3$  donc  $R_\theta$  est diagonalisable.  
 Si  $\theta \in \pi(2\mathbb{Z}+1)$ ,  $R_\theta = \text{diag}(1, -1, -1)$ , donc  $R_\theta$  est diagonalisable.  
 Si  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ ,  $P_{R_\theta}$  est scindé et à racines simples donc  $R_\theta$  est diagonalisable.  
 • Dans  $\mathbb{R}$ ,  $P_{R_\theta}(X) = (X-1)(X-2\cos(\theta)X+1)$ .  
 Si  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $R_\theta = I_3$  donc  $R_\theta$  est diagonalisable.  
 Si  $\theta \in \pi(2\mathbb{Z}+1)$ ,  $R_\theta = \text{diag}(1, -1, -1)$ , donc  $R_\theta$  est diagonalisable.  
 Si  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ ,  $P_{R_\theta}$  n'est pas scindé donc  $R_\theta$  n'est pas diagonalisable.



## Partie II

On considère l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot / \cdot \rangle)$ . On note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée au produit scalaire  $\langle \cdot / \cdot \rangle$ . Pour tout vecteur unitaire  $a$  de  $\mathbb{R}^3$ , on désigne par  $\sigma_a$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par :  $\sigma_a(x) = 2\langle x/a \rangle a - x$ .

1. (a) •  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \sigma_a^2(x) = \sigma_a(2\langle x/a \rangle a - x) = 2\langle x/a \rangle \sigma_a(a) - \sigma_a(x) = 2\langle x/a \rangle a - (2\langle x/a \rangle a - x) = x$  donc  $\sigma_a^2 = Id_{\mathbb{R}^3}$ .  
• Si  $x \in (\mathbb{R}a)^\perp \setminus \{0\}$ ,  $\sigma_a(x) = -x \neq x$  donc  $\sigma_a \neq Id_{\mathbb{R}^3}$ .
- (b) •  $x \in \text{Ker}(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow x = 2\langle x/a \rangle a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}a$ . D'où :  $\text{Ker}(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}a$ .  
•  $x \in \text{Ker}(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3}) \Leftrightarrow \langle x/a \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in (\mathbb{R}a)^\perp$ . D'où :  $\text{Ker}(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3}) = (\mathbb{R}a)^\perp$ .
- (c) Puisque  $\sigma_a$  une symétrie vectorielle et  $\text{Ker}(\sigma_a + Id_{\mathbb{R}^3}) = \text{Ker}(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3})^\perp$ , alors  $\sigma_a$  est la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\text{Ker}(\sigma_a - Id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}a$ .
- (d) • Comme  $\text{Vect}(a)$  et  $\text{Vect}(a)^\perp$  sont deux sev orthogonaux de  $\mathbb{R}^3$  qui est de dimension finie, alors  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(a) \oplus \text{Vect}(a)^\perp$ .  
• Soit  $(u, v, w)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  adaptée à la décomposition  $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(a) \oplus \text{Vect}(a)^\perp$ .  
On a :  $\sigma_a(u) = u, \sigma_a(v) = -v$  et  $\sigma_a(w) = -w$  donc  $\text{Mat}_{(u,v,w)}(\sigma_a) = \text{diag}(1, -1, -1)$ .  
•  $\det(\sigma_a) = \det(\text{Mat}_{(u,v,w)}(\sigma_a)) = 1$ .  
•  $\sigma_a$  est une symétrie orthogonale donc  $\sigma_a \in O_3(\mathbb{R})$ . Comme  $\det(\sigma_a) = 1$  alors  $\sigma_a \in SO_3(\mathbb{R})$ .
2. Soit  $r \in SO(\mathbb{R}^3)$  et  $a \in \mathbb{R}^3$  unitaire.  
 $\forall x \in \mathbb{R}^3, \sigma_a \circ r^{-1}(x) = \sigma_a(r^{-1}(x)) = 2\langle r^{-1}(x)/a \rangle a - r^{-1}(x) = 2\langle x/r(a) \rangle a - r^{-1}(x)$  donc  
 $r \circ \sigma_a \circ r^{-1}(x) = 2\langle x/r(a) \rangle r(a) - r(r^{-1}(x)) = 2\langle x/r(a) \rangle r(a) - x = \sigma_{r(a)}(x)$ . D'où :  $r \circ \sigma_a \circ r^{-1} = \sigma_{r(a)}$ .
3. Soit  $(u, v, w)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .  
• Soit  $x \in \mathbb{R}^3$ . Puisque  $(u, v, w)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $x = \langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v + \langle x, w \rangle w$ .  
•  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ , on a  $\sigma_u \circ \sigma_v(x) = \sigma_u(\sigma_v(x)) = 2\langle \sigma_v(x)/u \rangle u - \sigma_v(x)$ .  
Or,  $\langle \sigma_v(x)/u \rangle = \langle 2\langle v, x \rangle v - x, u \rangle = 2\langle v, x \rangle \langle v, u \rangle - \langle x, u \rangle = -\langle x, u \rangle$ . Il vient,  
 $\sigma_u \circ \sigma_v(x) = \sigma_u(\sigma_v(x)) = x - 2\langle x, u \rangle u + \langle x, v \rangle v = x - 2(x - \langle x, w \rangle w) = 2\langle x, w \rangle w - x = \sigma_w(x)$ .  
D'où :  $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_w$ .

## Partie III

Soit  $f \in SO(\mathbb{R}^3)$ ,  $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$ .

1. L'application  $t \mapsto P_f(t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $P_f$  est unitaire et de degré 3, donc  $\lim_{t \rightarrow -\infty} P_f(t) = -\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_f(t) = +\infty$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $P_f(\alpha) = 0$ . D'après I)1)a),  $\alpha \in \{-1, 1\}$ .

Notons  $m_\alpha$  l'ordre de multiplicité de  $\alpha$  et  $E_\alpha(f)$  le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\alpha$ . On a alors les possibilités suivantes :

- i) Si  $m_\alpha = 1$ , on prend  $\lambda_0 = \alpha$ .
- ii) Si  $m_\alpha = 2$ , alors  $P_f$  admet une autre racine simple  $\beta$ . On prend dans ce cas  $\lambda_0 = \beta$ .
- iii) Si  $m_\alpha = 3$ , alors on a nécessairement  $\alpha = 1$ . En effet, si  $\alpha = -1$ , et puisque  $P_f$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , on obtient  $\det(f) = -1$ , ce qui est absurde.

On distingue les cas suivants :

- Si  $\dim(E_1(f)) = 3$ , alors  $f = Id_{\mathbb{R}^3}$ , ce qui est absurde.
- Si  $\dim(E_1(f)) = 2$ , alors  $\dim((E_1(f))^\perp) = 1$ . De plus,  $E_1(f)$  est stable par  $f$ , d'après I)1)b),  $E_1(f)^\perp$  est stable par  $f$ . Soit  $(e_1, e_2)$  une base o.n de  $E_1(f)$  et  $e_3$  un vecteur unitaire de  $E_1(f)^\perp$ . On a  $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2$  et il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $f(e_3) = \gamma e_3$ . La matrice de  $f$  dans la base o.n  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $\text{diag}(1, 1, \gamma)$ . Il vient alors  $1 = \det(f) = \gamma$ , donc  $P_f = (X - 1)^3$  et  $m_1 = 3$ , ce qui est absurde.
- Si  $\dim(E_1(f)) = 1$ , alors  $\dim((E_1(f))^\perp) = 2$ . De plus,  $E_1(f)$  est stable par  $f$ , d'après I)1)b),  $E_1(f)^\perp$  est stable par  $f$ . Soit  $e_3$  un vecteur unitaire de  $E_1(f)$  et  $(e_1, e_2)$  une base o.n de  $E_1(f)^\perp$ . On a  $f(e_1) = e_1$



et il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $f(e_2) = ae_2 + be_3$  et  $f(e_3) = ce_2 + de_3$ . La matrice de  $f$  dans la base o.n  $(e_1, e_2, e_3)$  est  $\text{diag}(1, A)$  avec  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Comme  $f \in SO(\mathbb{R}^3)$ , alors  $A \in SO_2(\mathbb{R})$ . Il s'en suit que  $f$  admet seulement 1 comme valeur propre réelle ou 1 comme valeur propre simple et  $(-1)$  comme valeur propre double, ce qui aboutit à une contradiction.

2. Soit  $u$  un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre  $\lambda_0$ .

- (a)  $\mathbb{R}u$  est stable par  $f$ , d'après 1)b) de la partie I,  $(\mathbb{R}u)^\perp$  est stable par  $f$ .
- (b)  $(\mathbb{R}u)^\perp$  est un plan vectoriel, donc  $(\mathbb{R}u)^\perp$  admet une base o.n  $(e_2, e_3)$ . Puisque  $(\mathbb{R}u)^\perp$  est stable par  $f$ , on a  $f(e_2), f(e_3) \in (\mathbb{R}u)^\perp$  donc il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $f(e_2) = ae_2 + be_3$  et  $f(e_3) = ce_2 + de_3$ . Avec  $\|f(e_2)\| = 1$ , on obtient  $(a^2 + b^2) = 1$  donc il existe  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  tel que  $a = \cos(\theta)$ ,  $b = \sin(\theta)$ . Or,  $0 = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle f(e_2), f(e_3) \rangle = ac + bd$  et  $1 = \det(f) = \lambda_0(ad - bc)$  donnent  $a = \lambda_0 d$  et  $b = -c\lambda_0$ . Ainsi,  $f(e_2) = \cos(\theta)e_2 + \sin(\theta)e_3$  et  $f(e_3) = \frac{1}{\lambda_0}(-\sin(\theta)e_2 + \cos(\theta)e_3)$ . On distingue les deux cas suivants :
- Si  $\lambda_0 = -1$ , alors  $f(e_3) = \sin(\theta)e_2 - \cos(\theta)e_3$ . Dans ce cas, la matrice de  $f$  dans la base  $(u, e_2, e_3)$  est  $\text{diag}(\lambda_0, A)$  avec  $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ . Il vient :  $P_f = (X - 1)(X + 1)^2$  et par suite  $(-1)$  est une valeur propre double de  $f$ , ce qui est absurde.
  - Si  $\lambda_0 = 1$ , alors  $f(e_3) = -\sin(\theta)e_2 + \cos(\theta)e_3$ . Dans ce cas, on prend  $v = e_2$  et  $w = e_3$ .
  - Puisque  $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$ , on a  $\theta \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi]$ .  
Si  $\theta \in ]-\pi, 0[$ , on a  $(-\theta) \in ]0, \pi]$ ,  $f(-e_2) = \cos(-\theta)(-e_2) - \sin(-\theta)(-e_3)$  et  $f(-e_3) = \sin(-\theta)(-e_2) + \cos(-\theta)(-e_3)$ . Dans ce cas, on prend  $(v, w) = (-e_3, -e_2)$  et on remplace  $\theta$  par  $(-\theta)$ .  
Ainsi, on peut supposer que  $\theta \in ]0, \pi]$ .
- (c) On a  $f(u) = \lambda_0 u$ ,  $f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$  et  $f(w) = -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w$  donc  $\det(f) = \det_{(u, v, w)}(f(u), f(v), f(w)) = \lambda_0$ . Comme  $\det(f) = 1$ , alors  $\lambda_0 = 1$ .
- (d)  $f(u) = u$ ,  $f(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)w$  et  $f(w) = -\sin(\theta)v + \cos(\theta)w$  donc la matrice de  $f$  dans la base  $(u, v, w)$  est  $R_\theta$ .

3. On suppose que  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et on considère l'application  $\Psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \Psi(x) = \langle f(x)/x \rangle$ .

- (a) •  $\Psi$  est la composée des deux applications continues  $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto (f(x), x) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  donc  $\Psi$  est continue sur  $\mathbb{R}^3$ .  
•  $\Psi(u) = \langle f(u), u \rangle = \|u\|^2 = 1$  et  $\Psi(v) = \langle f(v), v \rangle = \cos(\theta)\|v\|^2 = \cos(\theta)$ .
- (b) Soit  $\mathbb{S}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On admet que  $\Psi(\mathbb{S})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  
On a  $\Psi(u) = 1 > 0$ ,  $\Psi(v) = \cos(\theta) \leq 0$  et  $\Psi(\mathbb{S})$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  donc  $0 \in \Psi(\mathbb{S})$ .
- (c)  $0 \in \Psi(\mathbb{S})$  donc il existe  $a \in \mathbb{S}$  tel que  $\Psi(a) = 0$ , c'est à dire  $f(a) \perp a$ .

4. On pose  $b = f(a)$  et soit  $c \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(a, b, c)$  soit une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .

Puisque  $f \in SO(\mathbb{R}^3)$ , d'après II)2), on a  $f \circ \sigma_a^{-1} \circ f^{-1} = f \circ \sigma_a \circ f^{-1} = \sigma_{f(a)} = \sigma_b$ .

Puisque  $(a, b, c)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ , d'après II)3),  $\sigma_a \circ f \circ \sigma_a^{-1} \circ f^{-1} = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$ .