

REPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Concours Nationaux d'Entrée
aux Cycles de Formation d'Ingénieurs
Session 2018



الجمهورية التونسية

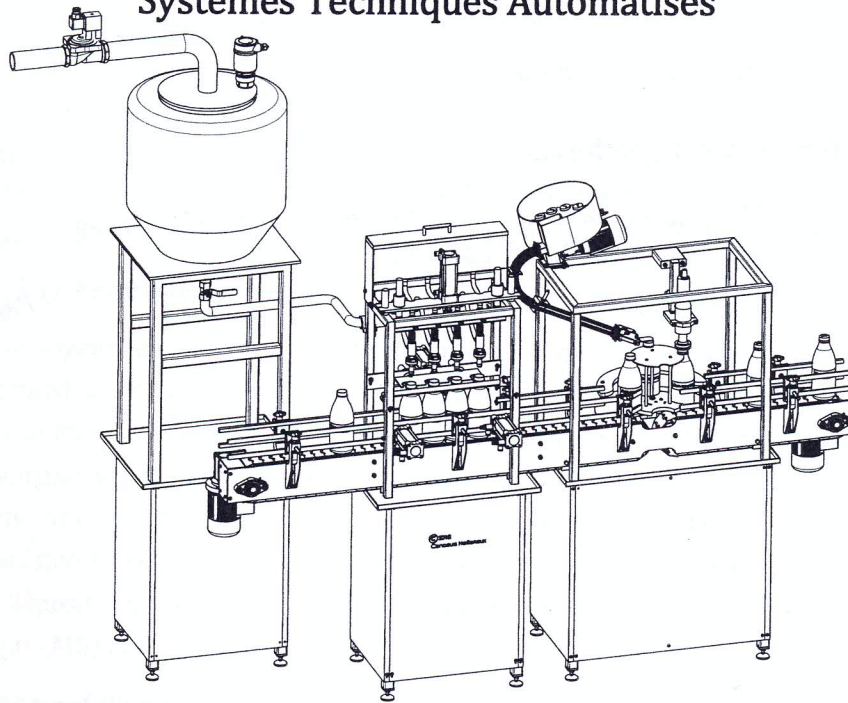
وزارة التعليم العالي
والبحوث العلمي

المناظرات الوطنية للدخول الى مراحل تكوين المهندسين
دورة 2018

Concours Technologie

Épreuve de

Systèmes Techniques Automatisés



Date : Mardi 05 Juin 2018

Heure : 8.00 H

Durée : 3 Heures

L'épreuve comporte deux parties :

- A- Mécanique des Solides Indéformables & Résistance des Matériaux (10 pts)
- B- Automatique (10 pts)

Le sujet de l'épreuve remis au candidat comporte trois dossiers :

- 1- Mise en situation, Données et Hypothèses
- 2- Document Réponses
- 3- Document Technique : DT-01

Important :

- Aucun autre document n'est autorisé.
- Seules les calculatrices de poche non programmables sont autorisées.
- Il n'est fourni au candidat qu'une seule et unique copie du «Dossier document réponses » qui doit être rendu en totalité, à la fin de l'épreuve, même sans réponses.
- Le document réponses doit être rendu en intégralité (**aucune feuille ne doit être supprimée**). Cet acte est considéré comme étant une tentative de fraude.

Dossier

Mise en situation, Données et Hypothèses

Ce dossier comporte **13** pages numérotées de **1 à 13** et un document technique **DT-01**

- **Mise en situation** : Page 1 à 3
 - Document technique* : DT-01
- **Données et hypothèses** : Page 4 à 13
 - ★ *Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I) & Résistance des Matériaux (R.D.M)* : Page 4 à 8
 - ★ *Automatique* : Page 9 à 13

ÉTUDE D'UNE LIGNE DE REMPLISSAGE ET DE BOUCHAGE DE BOUTEILLES

1- Mise en situation

Le système proposé à l'étude représente une chaîne de conditionnement de produits liquides. Il est constitué, comme l'illustre le document technique **DT-01**, de trois unités ayant pour fonctions respectives : le stockage et l'alimentation en produit, le remplissage du produit dans des bouteilles et le bouchage des bouteilles.

La première unité (**Unité I**) comporte la cuve de stockage, l'électrovanne **A**, la vanne **B** et un ensemble de tubes assurant le transfert du produit vers l'unité de remplissage (**Unité II**).

Les éléments constituant l'**unité II** sont principalement :

- Un convoyeur linéaire (**CL1**) formé par le tapis (**T1**) entraîné en mouvement par l'intermédiaire du motoréducteur (**M1**). Il assure le transfert des bouteilles remplies vers l'unité de bouchage (**Unité III**),
- Un dispositif de remplissage formé de 4 buses,
- Un ensemble composé de 4 vérins **V1**, **V2**, **V3** et **V4**, assurant le mouvement d'approche des buses ainsi que le maintien en position des bouteilles durant la phase de remplissage.

L'**unité III** est formée des éléments suivants :

- Un convoyeur linéaire (**CL2**) formé du tapis (**T2**) qui est entraîné en mouvement par l'intermédiaire du motoréducteur (**M2**). Il assure l'évacuation des bouteilles bouchées,
- Un ensemble constitué d'un magasin de stockage de bouchons, d'une goulotte et d'un mécanisme de pose de bouchons,
- Un mécanisme de transfert des bouteilles, formé d'un motoréducteur (**M3**), d'un mécanisme à croix de Malte solidaire d'une étoile de transfert (**DT-01**),
- Un dispositif pneumatique formé principalement par le vérin **V5** équipé d'un moteur (**M5**) ayant pour rôle le vissage des bouchons.

2. Fonctionnement du système

Le convoyeur linéaire d'alimentation (**CL1**) emmène les bouteilles au poste de remplissage. Les vérins **V1**, **V2** et **V3** actionnent un dispositif pour bloquer les bouteilles, en position face aux buses d'injection du produit. Le vérin **V4** assure le mouvement d'approche des buses d'injection vers les cols des bouteilles.

Après remplissage, les bouteilles sont guidées vers l'étoile de transfert, celle-ci est liée à un mécanisme à croix de Malte composé, comme l'indique les **Figures 1** et **2**, du maneton (**1**), du galet (**3**) et de l'ensemble (**2**) (croix de Malte + étoile de transfert). Le maneton (**1**), mis en mouvement par un motoréducteur à courant continu, est en rotation autour de l'axe vertical et entraîne dans son mouvement le galet (**3**). Au cours d'un tour du maneton (**1**), le galet (**3**) s'engage dans une rainure de la croix de Malte (ensemble (**2**)) puis s'en dégage comme le montre la **Figure 3**. L'ensemble (**2**) est donc entraîné en rotation autour de son axe de façon intermittente par le maneton (**1**).

Dans son mouvement, l'ensemble (2) entraîne l'étoile de transfert, la bouteille (Bt_i) est alors amenée par la rainure (j), sous le système de pose de bouchon. La bouteille (Bt_{i+1}) prend place dans la rainure (j + 1). Dans son mouvement vers le poste de bouchage, le bouchon est posé sur le col de la bouteille (Bt_i) via une languette élastique assurant sa stabilité. Sous la tête de bouchage, la bouteille est immédiatement bloquée par le vérin de serrage (V5). Lorsque le bouchon est vissé, le maneton (1) entraîne à nouveau l'ensemble (2), la bouteille (Bt_i) est dirigée vers l'évacuation par le convoyeur linéaire (CL2) et la bouteille (Bt_{i+1}) est conduite à son tour sous la tête de vissage.

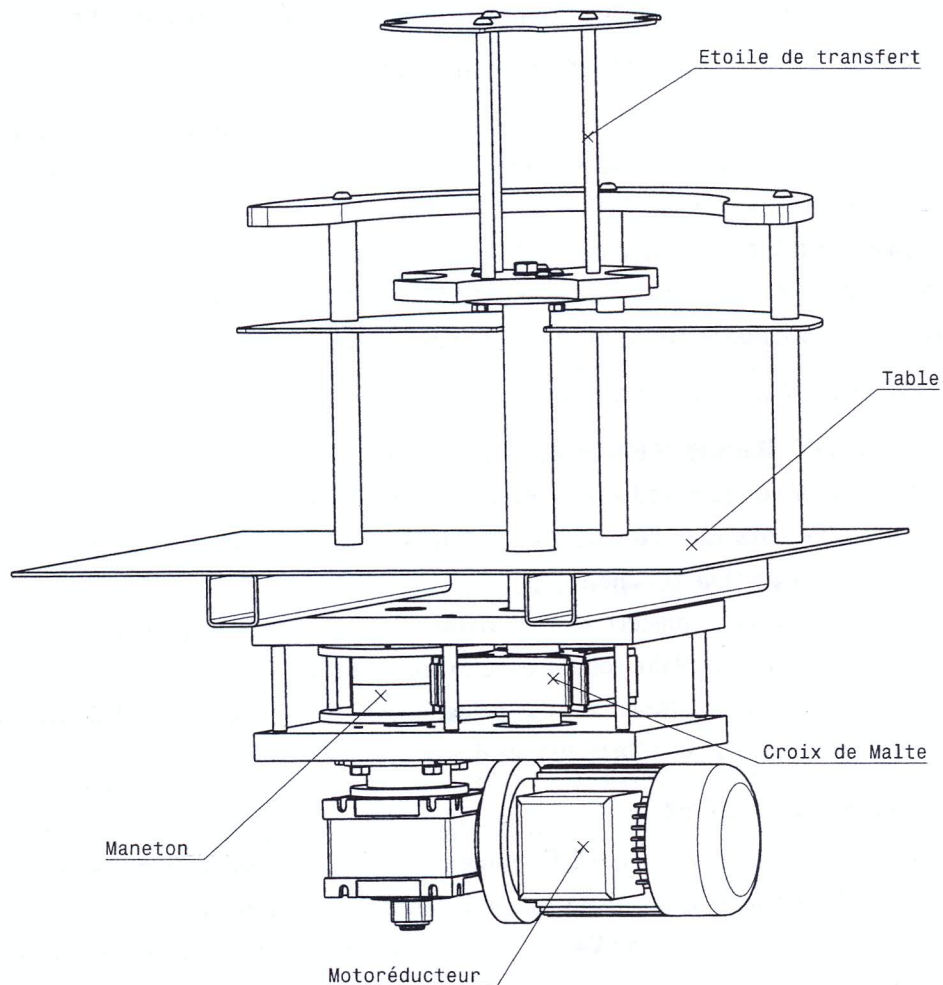


Figure 1- Mécanisme de guidage et de transfert de bouteilles de l'unité III

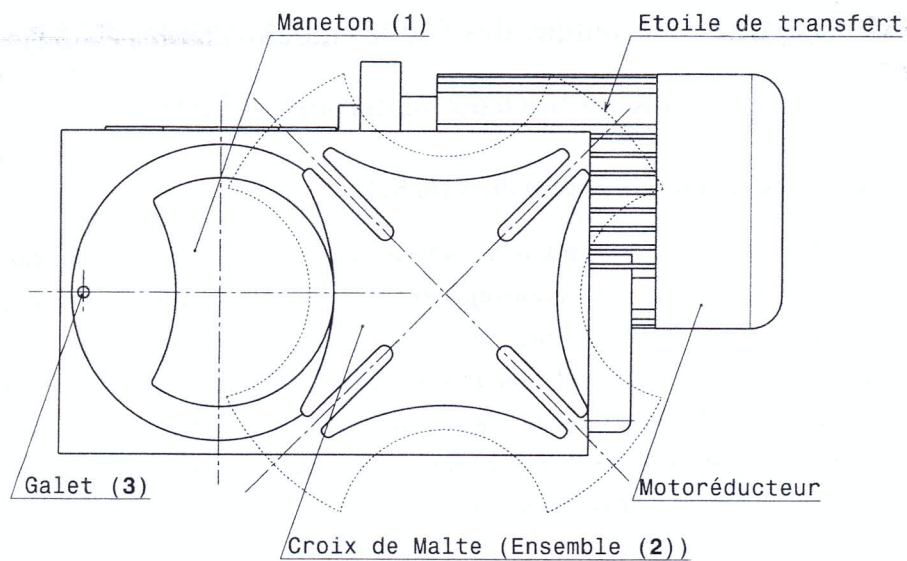


Figure 2- Schéma de principe du mécanisme de croix de Malte

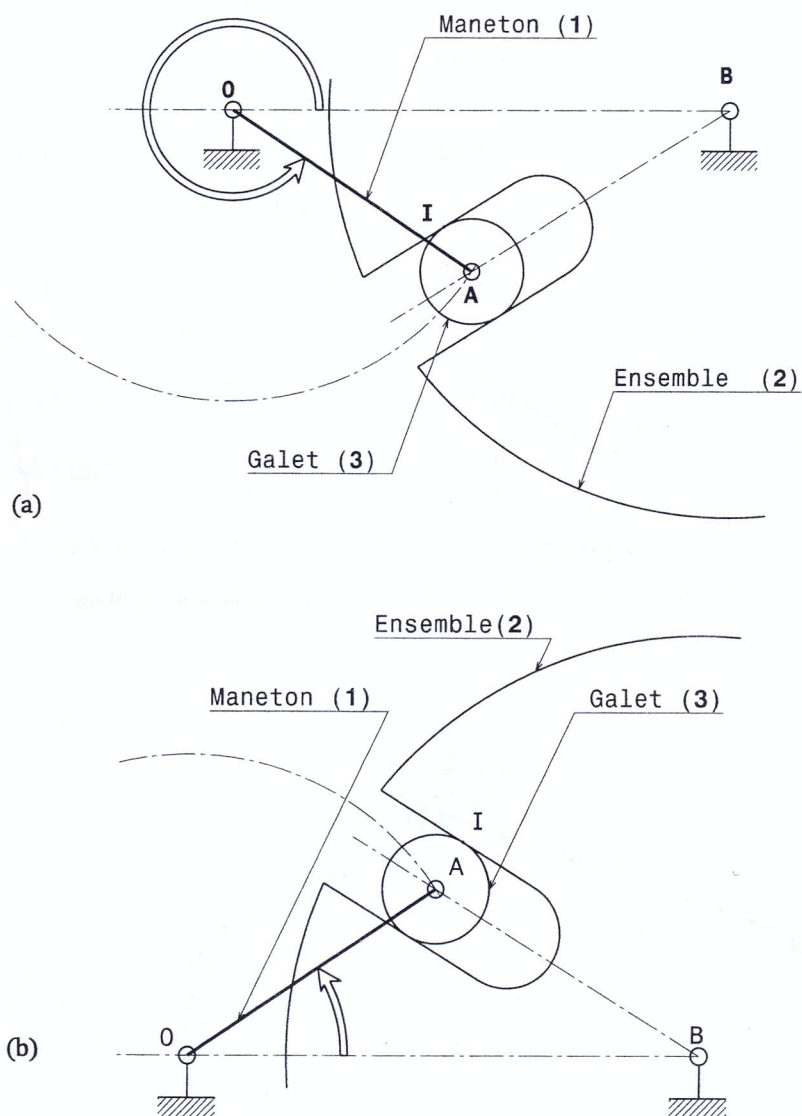


Figure 3- (a) Maneton en position d'engagement, (b) Maneton en position de dégagement

Partie A : Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I) & Résistance des Matériaux (R.D.M)

A-1. Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I)

Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude mécanique du sous-système formé du maneton (1), de l'ensemble (2) et du galet (3). Ce mécanisme permet de transformer le mouvement de rotation continu du maneton (1), à vitesse angulaire constante ω , en un mouvement intermittent de l'étoile de transfert via la croix de Malte qui lui est solidaire. La Figure 2 illustre l'emplacement du mécanisme par rapport au motoréducteur à courant continu. La Figure 4 schématise le principe de fonctionnement du mécanisme d'entraînement de l'étoile de transfert. La Figure 5 présente le schéma cinématique minimal de ce mécanisme.

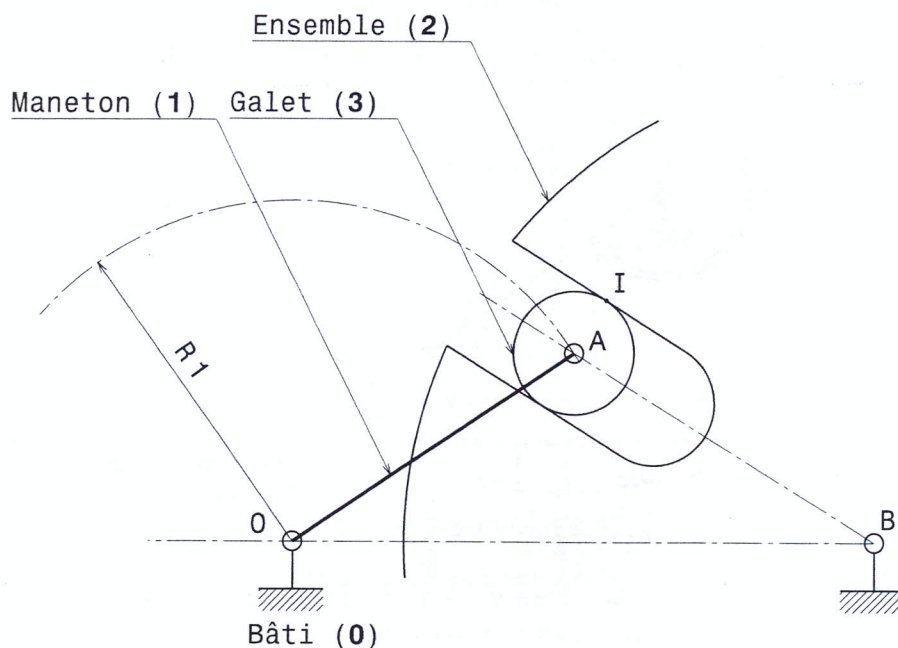


Figure 4- Schéma de principe du maneton et de la croix de Malte

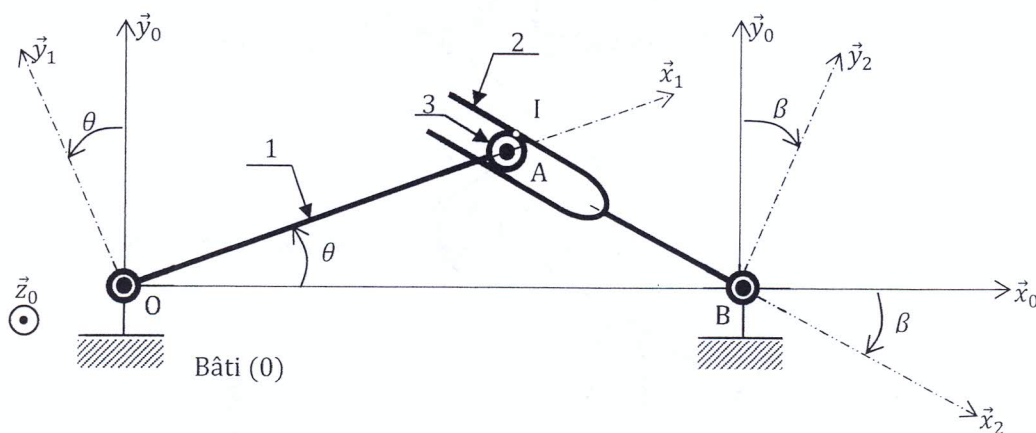


Figure 5- Schéma cinématique minimal du mécanisme de la croix de Malte

A-2. Repères et paramètres

Repères

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: Repère lié au bâti (0), il est pris pour un repère galiléen avec $(O, \vec{z}_0)$ comme axe vertical ascendant,
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: Repère lié au maneton (1),
- $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: Repère lié à l'ensemble (2),

Avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$ et $\overrightarrow{OB} = D\vec{x}_0$ (D est une constante dimensionnelle du mécanisme).

Paramètres géométriques

Les paramètres du mécanisme se présentent comme suit :

- La rotation du maneton (1) autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$ est représentée par l'angle θ , il est tel que : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- La rotation de l'ensemble (2) autour de l'axe $(B, \vec{z}_0)$ est représentée par l'angle β , il est tel que : $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$
- La position du centre A du galet (3) est définie par les vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} = R_1\vec{x}_1 \text{ et } \overrightarrow{AB} = \lambda\vec{x}_2, (\lambda \text{ est variable})$$

où R_1 est une dimension constante liée au maneton et λ la distance séparant le centre A du galet (3), du point B .

A-3. Données relatives à l'étude dynamique et énergétique

Caractéristiques d'inertie

L'ensemble (2) formé par la croix de Malte et l'étoile de transfert admet pour :

- masse : m_2
- centre d'inertie G_2 avec $\overrightarrow{BG_2} = r_2\vec{x}_2 + h\vec{z}_0$
- matrice d'inertie au point B : $[I_2]_B = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & A_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$

Efforts appliqués à l'ensemble (2)

Le galet (3), de masse supposée négligeable, est un composant intermédiaire entre le maneton (1) et l'ensemble (2). Son rôle consiste à réduire les frottements au niveau de son contact en I avec la croix de Malte (ensemble (2)).

A-4. Résistance des matériaux

N.B : Les notations utilisées dans cette section sont propres à la partie «résistance des matériaux».

On s'intéresse au dimensionnement de l'axe assurant l'entraînement en rotation continue du maneton (1). Cet axe est assimilé à une poutre droite, cylindrique à section supposée uniforme, guidée en rotation par deux roulements montés respectivement sur une plaque inférieure et une plaque supérieure en liaison complète avec le bâti (0) comme le montre la **Figure 7**. On notera par $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère associé à cet axe.

Au niveau de la section de centre O , l'axe est soumis à l'effet du couple développé par le motoréducteur qu'on notera : $\vec{C}_O = C_{mr} \vec{x}$. La force exercée par l'ensemble (2) sur le galet (3) est transmise à l'axe par l'intermédiaire d'une clavette. Cette action engendre au niveau de la section de centre B , une action mécanique représentée par le torseur :

$$\{\tau\}_B = \{\vec{F} \mid \vec{C}\}_B$$

Avec $\vec{F} = -F \vec{z}$ et $\vec{C} = -C \vec{x} = -\delta \cdot F \vec{x}$

où F et δ sont des constantes positives

Les roulements de centres respectifs A et C sont modélisés par des linéaires annulaires d'axes confondus avec $(O, \vec{x})$.

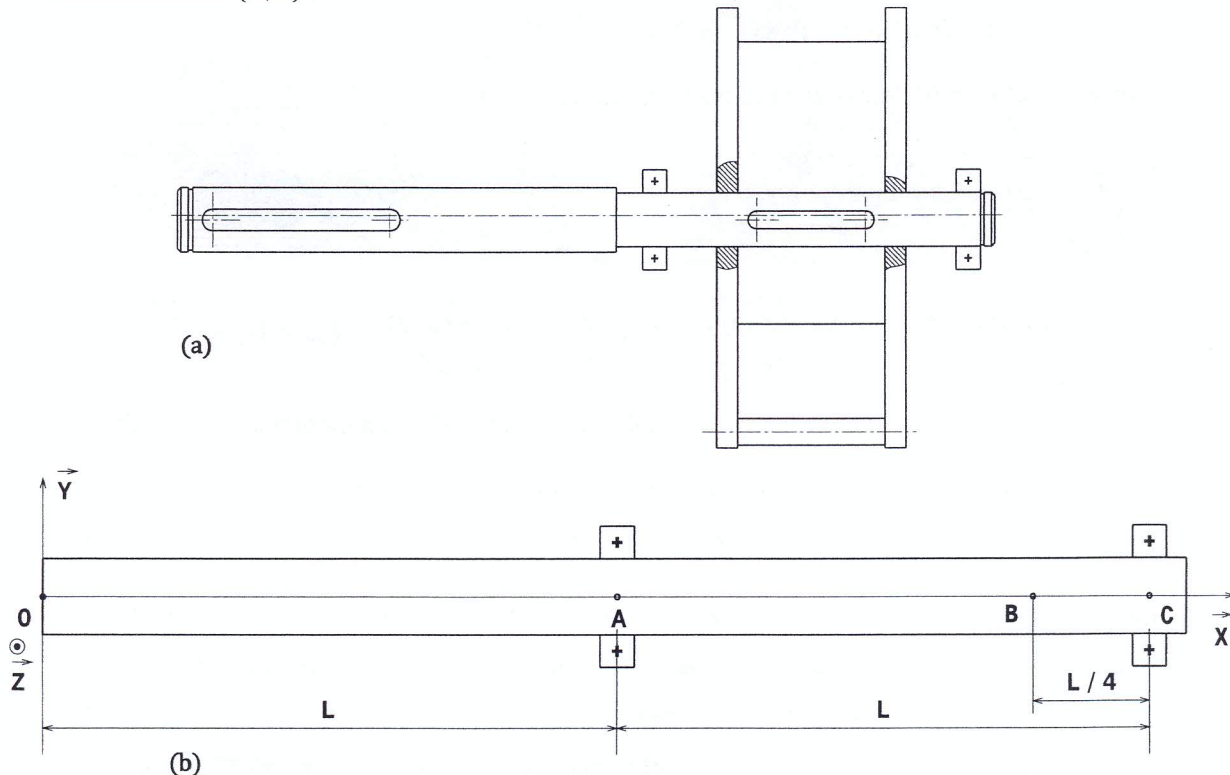


Figure 7- (a) Modèle réel de l'axe, (b) Modèle simplifié de l'axe pour le calcul de résistance des matériaux

Le poids propre de l'axe et les frottements sont négligés.

On donne :

- Le diamètre minimal de l'axe : $D_a = 12 \text{ mm}$
- La longueur totale de l'axe : $OC = 2L = 160 \text{ mm}$
- La distance entre les deux roulements : $AC = L = 80 \text{ mm}$
- La distance : $BC = \frac{L}{4} = 20 \text{ mm}$
- La constante : $\delta = 6 \text{ mm}$
- Le couple à la sortie du motoréducteur : $C_{mr} = 1.2 \text{ N.m}$

Le matériau de l'axe est un acier non allié, ayant pour caractéristiques élastiques :

- Module de rigidité longitudinale (Module de Young) : $E = 210 \text{ GPa}$
- Module de rigidité transversale (Module de Coulomb) : $G = 80 \text{ GPa}$
- Coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$
- Limite élastique : $R_e = 200 \text{ MPa}$
- Contrainte tangentielle limite élastique : $\tau_e = 100 \text{ MPa}$

Le coefficient de sécurité sera fixé à $s = 2.5$.

Pour une section circulaire de diamètre D , on donne :

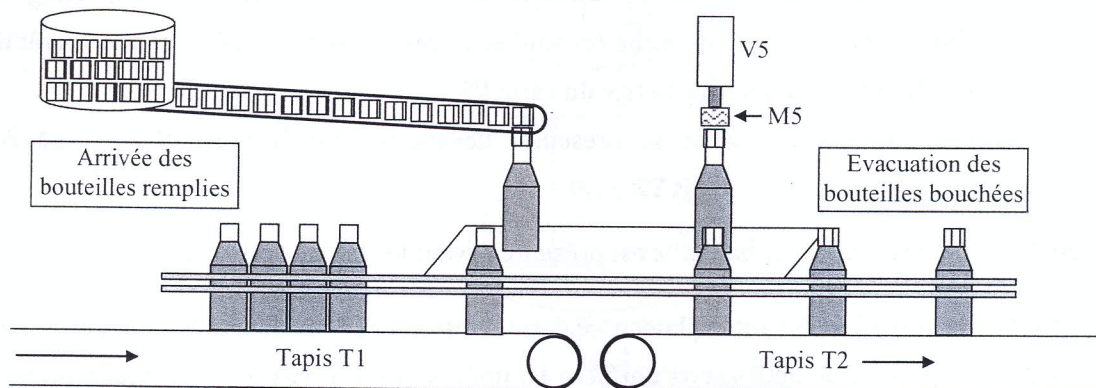
- Le moment d'inertie polaire : $I_{G0} = \frac{\pi D^4}{32}$
- Le moment d'inertie par rapport aux axes $(o, \vec{y})$ et $(o, \vec{z})$: $I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64}$

Partie B : Automatique

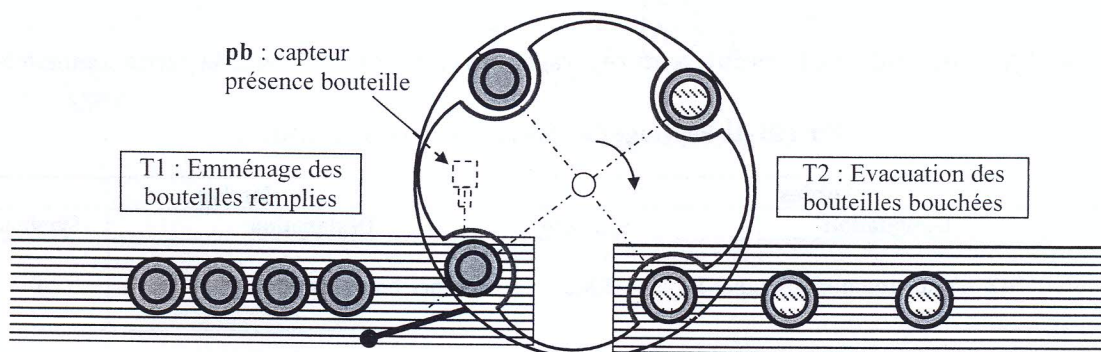
L'objet de cette partie est l'étude de l'automatisation du système d'embouteillage constitué de trois unités comme le montre le document technique **DT-01**.

B-1. Étude séquentielle de l'unité de bouchage des bouteilles

Cette unité permet le bouchage des bouteilles remplies et leur évacuation comme le montre la **Figure 8**.



Vue de face de l'unité de bouchage sans l'étoile de transfert



Vue de dessus montrant l'étoile de transfert

Figure 8- Unité de bouchage (Unité III)

Description du fonctionnement de l'unité de bouchage

Les bouteilles remplies arrivent sur le tapis **T1** devant l'étoile de transfert permettant leurs déplacements entre les postes de bouchage et d'évacuation.

La présence de bouteilles est détectée par un capteur « **pb** » mettant en fonctionnement en même temps le tapis **T2** qui permet l'évacuation des bouteilles bouchées et le plateau (étoile de transfert) qui permet le déplacement des bouteilles devant les postes : le poste de mise des bouchons, le poste de vissage des bouchons et le poste d'évacuation des bouteilles. (Le moteur **M2** du tapis **T2** et le moteur **M3** du plateau resteront en fonctionnement jusqu' à l'arrêt du système).

En effet, à chaque quart de tour du plateau détecté par un capteur de position « **d** », on aura simultanément les actions suivantes :

- Une bouteille vient se placer devant le poste de mise de bouchons, ce dernier est libéré par action sur un électro-aimant **KA**,
- La bouteille ayant eu un bouchon se déplace devant le poste de vissage, un vérin équipé d'un moteur électrique sur l'extrémité de sa tige fait descendre le moteur, ce dernier se met ensuite en rotation pendant 3 secondes (temps nécessaire pour assurer le vissage du bouchon). Une fois les trois secondes sont écoulées, on aura en même temps l'arrêt du moteur **M5** et la remontée de la tige du vérin **V5**,
- La bouteille bouchée vient se présenter devant le poste d'évacuation qui se fait automatiquement par le tapis **T2**.

Le cycle se répète tant qu'une bouteille est présente devant le plateau (**pb** = 1).

En absence de bouteilles devant le plateau, ce dernier effectuera deux quarts de tour. Le premier quart de tour permet de déplacer la dernière bouteille devant le poste de vissage. Ensuite le deuxième quart de tour servira à l'évacuation de cette bouteille. Le système s'arrête en attendant la présence de nouvelles bouteilles.

On donne, dans le **Tableau 1**, les différents repérages des entrées et sorties de la partie commande.

Tableau -1 : Repérage des différentes entrées et sorties

Sorties		Entrées	
Désignation	Symbole	Désignation	Symbole
Moteur M2 d'entraînement du tapis T2	KM2	Présence bouteille devant le plateau	pb
Moteur M3 d'entraînement du plateau	KM3	Capteur indiquant la mise en place du bouchon	c
Moteur de vissage des bouchons (ne nécessite pas de pré-actionneur)	M5	Capteur de position qui indique qu'un quart de tour du plateau est effectué	d
Vérin double effet pour le déplacement du moteur de vissage des bouchons	V5	Capteur indiquant la sortie de la tige du vérin V5	a₅₁
Électro-aimant pour autoriser la descente du bouchon	KA	Capteur indiquant la rentrée de la tige du vérin V5	a₅₀

NB : Pour l'activation d'un actionneur bistable **Vn**, on utilise la notation **Vn** = 1

Pour la désactivation d'un actionneur bistable **Vn**, on utilise la notation **Vn** : 0

B-2. Régulation du niveau du liquide dans la cuve de stockage

On considère la régulation automatique du niveau du liquide dans une cuve de stockage, de section $S = 0.5 \text{ m}^2$, schématisée par la Figure 9.

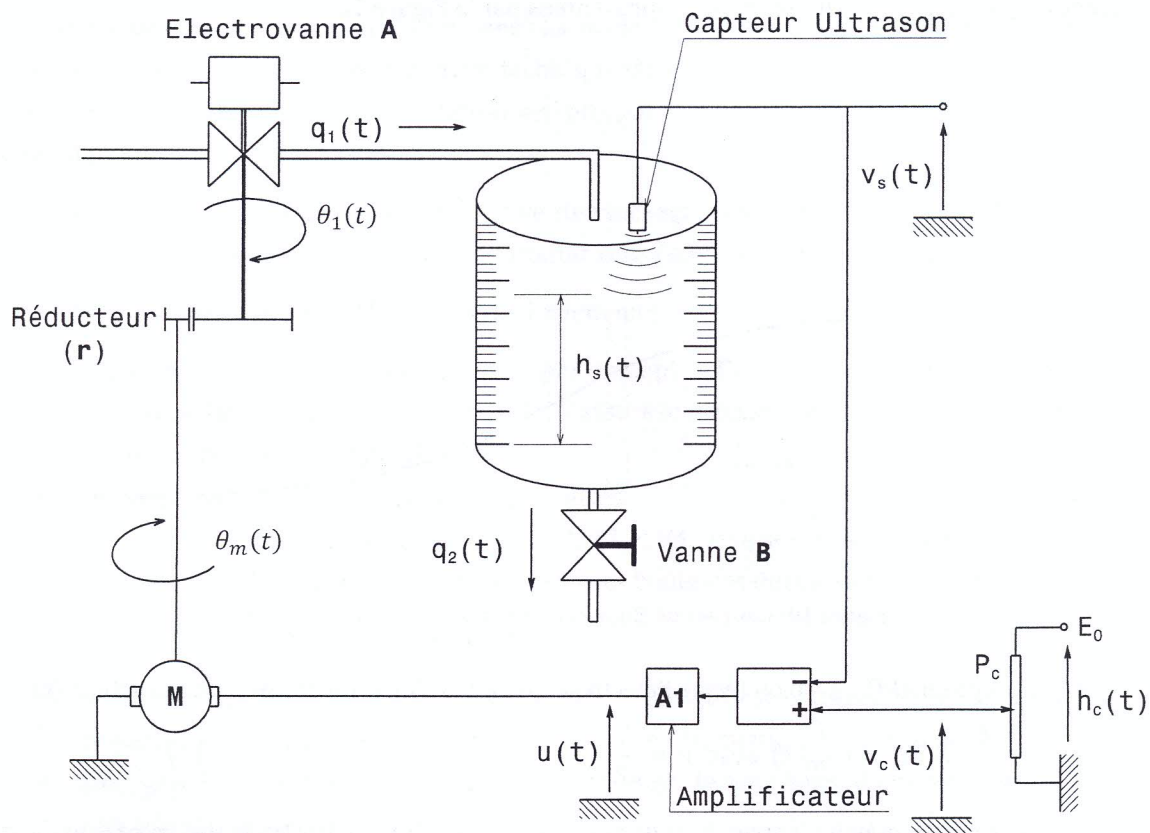


Figure 9- Schéma de l'asservissement

Modélisation de la chaîne d'asservissement

Le débit $q_1 \text{ (m}^3/\text{s)}$ est réglé par une électrovanne A motorisée ; il est proportionnel à l'angle $\theta_1 \text{ (rad)}$ d'ouverture de cette électrovanne :

$$q_1(t) = k_1 \cdot \theta_1(t) \text{ avec } k_1 = 0.1 \text{ m}^3/(\text{s} \cdot \text{rad}) \quad (1)$$

q_2 représente le débit de sortie lié à l'utilisation du liquide de la cuve de stockage, commandée manuellement par la vanne B.

Le moteur (M) est alimenté par une tension $u(t)$, créée par un comparateur suivi d'un amplificateur de gain A_1 :

$$u(t) = A_1 [v_c(t) - v_s(t)], \quad A_1 > 0 \quad (2)$$

Le moteur (**M**) tourne à la vitesse ω_m , son modèle (entrée tension, sortie vitesse) est un premier ordre de fonction de transfert $T_m(p)$ ayant un gain statique K_m et une constante de temps τ_m ; la position angulaire de son arbre est $\theta_m(t)$. Les courbes de Bode caractérisant la fonction harmonique $T_m(j\omega)$ du moteur sont représentées par la **Figure 10**.

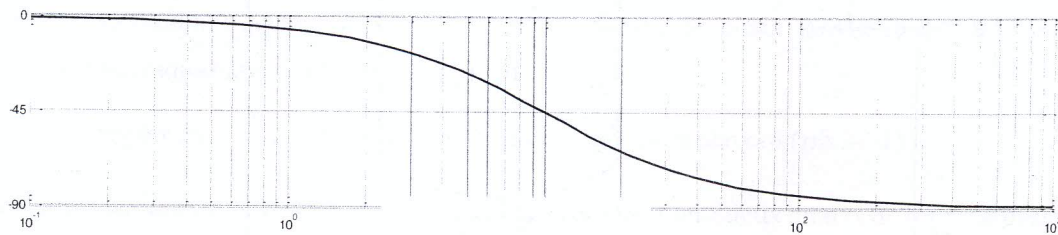


Figure 10- Courbes de Bode caractérisant la fonction $T_m(j\omega)$

- Le moteur (**M**) ouvre ou ferme l'électrovanne **A** par l'intermédiaire d'un réducteur (**r**).

$$\theta_1(t) = r\theta_m(t) \text{ avec } r = \frac{1}{20} \quad (3)$$

- Le potentiomètre d'entrée P_c délivre une tension $v_c(t)$ proportionnelle au niveau de la consigne $h_c(t)$ demandé.

$$v_c(t) = k_c h_c(t) \text{ avec } k_c = 20 \text{ V/m} \quad (4)$$

- Le capteur ultrason mesure le niveau $h_s(t)$ dans la cuve de stockage. Il délivre une tension $v_s(t)$ proportionnelle à $h_s(t)$ obéissant à la loi suivante :

$$v_s(t) = k_s h_s(t) \quad (5)$$

On prendra $k_s = k_c$

- Les fonctions de transfert de la cuve de stockage sont :

$$\frac{H_s(p)}{Q_1(p)} = \frac{1}{S.p} \text{ et } \frac{H_s(p)}{Q_2(p)} = \frac{1}{S.p} \quad (6)$$

L'asservissement de la **Figure 9** peut être représenté par le schéma fonctionnel de la **Figure 11**.

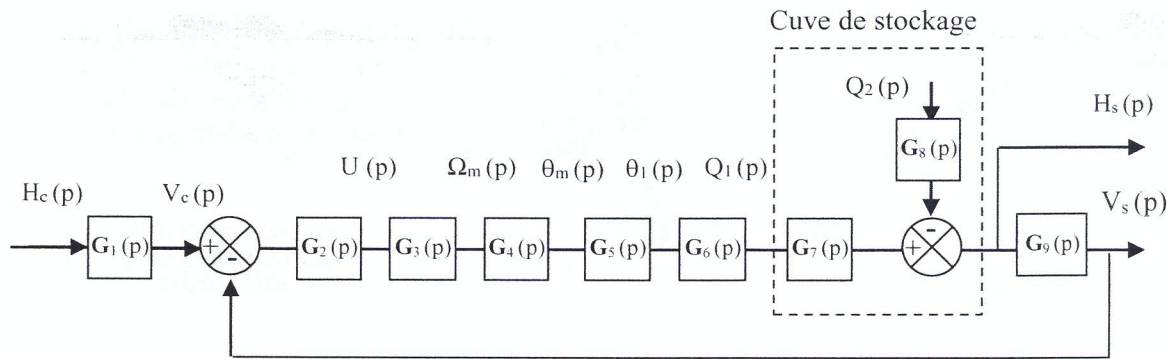


Figure 11- Schéma fonctionnel de l'asservissement à étudier

Amélioration des performances de la chaîne d'asservissement

La régulation par une simple boucle ne permet pas de garantir la stabilité du système. Par conséquent, on propose d'utiliser une structure en cascade (**Figure 12**) comportant deux boucles imbriquées. Une boucle interne qui contrôle l'ouverture de l'électrovanne **A** et une boucle externe de régulation de niveau $h_s(t)$ dans la cuve de stockage.

On mesure avec un autre potentiomètre la position de l'électrovanne ; celui-ci délivre une tension $v_m(t)$ telle que $v_m(t) = b \cdot \theta_1(t)$ avec $b = 20 \text{ V/rad}$; le signal de commande est élaboré grâce à un comparateur et un amplificateur de gain A_2 .

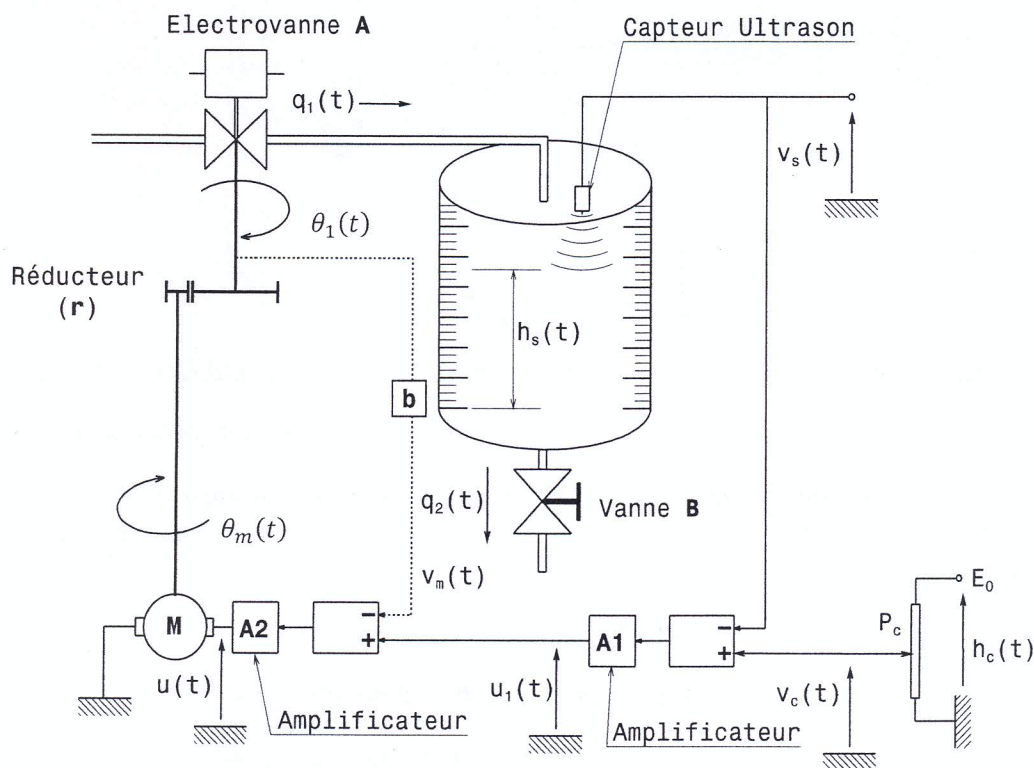
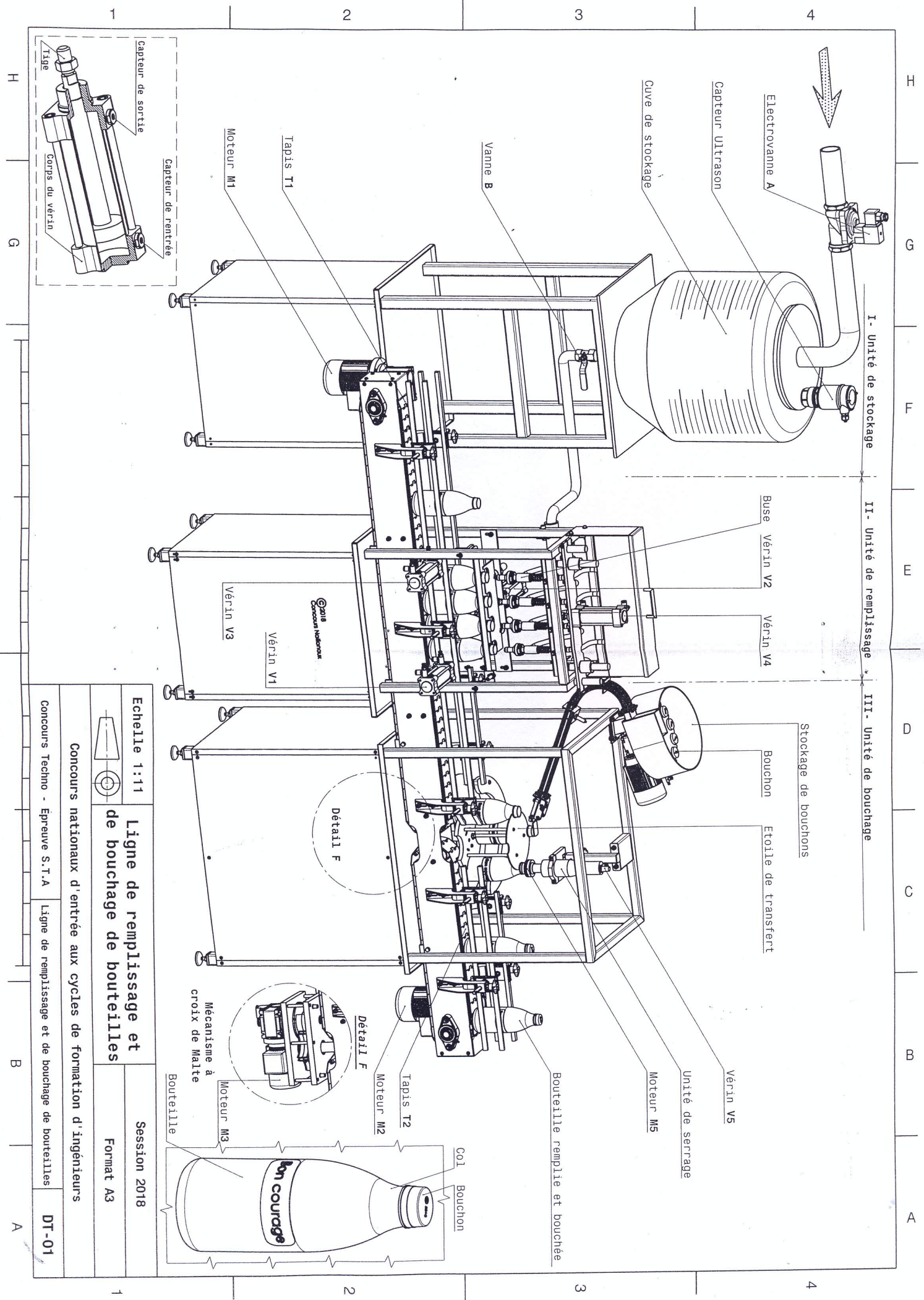


Figure 12- Schéma du nouveau asservissement



Echelle 1:11

Ligne de remplissage et de bouchage de bouteilles

Session 2018

Format A3

Concours nationaux d'entrée aux cycles de formation d'ingénieurs

Concours Techno - Épreuve S.T.A

Ligne de remplissage et de bouchage de bouteilles

DT-01

Partie A : Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I) & Résistance des Matériaux (R.D.M)

1- Étude cinématique

A.1. Utiliser la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, pour exprimer le torseur cinématique représentant le mouvement du maneton (1) par rapport au bâti (0) :

a. au point O :

Mouvement du maneton (1) par rapport au bâti (0) : rotation d'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{V}_{O/0} = \vec{0}$$

$$\{\vartheta_{1/0}\}_O = \{\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{z}_1 \mid \vec{V}_{O/0} = \vec{0}\}$$

b. au centre A du galet :

$$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{V}_{A/0} = \vec{V}_{O/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA} = \dot{\theta} \vec{z}_1 \wedge R_1 \vec{x}_1 = R_1 \dot{\theta} \vec{y}_1$$

$$\{\vartheta_{1/0}\}_A = \{\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{z}_1 \mid \vec{V}_{A/0} = R_1 \dot{\theta} \vec{y}_1\}$$

A.2. Exprimer, au point B, et dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, le torseur cinématique représentant le mouvement de l'ensemble (2) par rapport au bâti (0).

Mouvement du maneton (2) par rapport au bâti (0) : rotation d'axe $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = -\dot{\beta} \vec{z}_0 \quad \text{et} \quad \vec{V}_{B/0} = \vec{0}$$

$$\{\vartheta_{2/0}\}_B = \{\vec{\Omega}_{2/0} = -\dot{\beta} \vec{z}_1 \mid \vec{V}_{B/0} = \vec{0}\}$$

A.3. Déterminer la vitesse du centre A du galet (3) par rapport au bâti (0), en passant par le point B ; et l'exprimer dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

$$\vec{V}_{A/0} = \left(\frac{d\vec{BA}}{dt} \right)_0 = \frac{d}{dt}(-\lambda \vec{x}_2) = \dot{\lambda} \vec{x}_2 + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x}_2 \rightarrow \vec{V}_{A/0} = -\dot{\lambda} \vec{x}_2 + \lambda \dot{\beta} \vec{y}_2$$

$$\vec{V}_{A/0} = -\dot{\lambda} \vec{x}_2 + \lambda \dot{\beta} \vec{y}_2$$

A.4. Écrire les relations cinématiques traduisant la fermeture de la chaîne (0 - 1 - 3 - 2 - 0).

$$\text{D'une part : } \vec{V}_{A/0} = R_1 \dot{\theta} \vec{y}_1 = R_1 \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0)$$

$$\text{D'autre part : } \vec{V}_{A/0} = -\dot{\lambda} \vec{x}_2 + \lambda \dot{\beta} \vec{y}_2$$

$$\rightarrow \vec{V}_{A/0} = -\dot{\lambda} (\cos \beta \vec{x}_0 - \sin \beta \vec{y}_0) + \lambda \dot{\beta} (\sin \beta \vec{x}_0 + \cos \beta \vec{y}_0)$$

$$\vec{V}_{A/0} = (-\dot{\lambda} \cos \beta + \lambda \dot{\beta} \sin \beta) \vec{x}_0 + (\dot{\lambda} \sin \beta + \lambda \dot{\beta} \cos \beta) \vec{y}_0$$

Par identification :

$$-R_1 \dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\lambda} \cos \beta + \lambda \dot{\beta} \sin \beta \quad (1)$$

$$R_1 \dot{\theta} \cos \theta = \dot{\lambda} \sin \beta + \lambda \dot{\beta} \cos \beta \quad (2)$$

A.5. En déduire les relations géométriques traduisant la fermeture de la chaîne (0 - 1 - 3 - 2 - 0) tout en précisant les valeurs que doivent vérifier les constantes d'intégration. Montrer alors

que la relation : $\text{tg} \beta = \frac{R_1 \sin \theta}{D - R_1 \cos \theta}$ représente la loi entrée-sortie du mécanisme.

$$-R_1 \dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\lambda} \cos \beta + \lambda \dot{\beta} \sin \beta \quad (1) \rightarrow \frac{d}{dt} [R_1 \cos \theta] = -\frac{d}{dt} [\lambda \cos \beta] \quad (3)$$

$$R_1 \dot{\theta} \cos \theta = \dot{\lambda} \sin \beta + \lambda \dot{\beta} \cos \beta \quad (2) \rightarrow \frac{d}{dt} [R_1 \sin \theta] = \frac{d}{dt} [\lambda \sin \beta] \quad (4)$$

L'intégration des relations (3) et (4) conduit à :

$$(3) \rightarrow R_1 \cos \theta + \lambda \cos \beta = C_1$$

$$(4) \rightarrow R_1 \sin \theta - \lambda \sin \beta = C_2$$

En utilisant la chaîne (0-1-2-0) : on montre $C_1 = D$ et $C_2 = 0$

$$\text{Ainsi : } \lambda \cos \beta = D - R_1 \cos \theta \quad (5) \quad \text{et} \quad \lambda \sin \beta = R_1 \sin \theta \quad (6)$$

En divisant membre à membre (5) et (6), on obtient $\text{tg} \beta = \frac{R_1 \sin \theta}{D - R_1 \cos \theta}$

A.6. Déterminer, en fonction de D et de R_1 , les relations exprimant les limites extrêmes $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ de λ qui correspondent aux positions respectives $(\theta = 0, \beta = 0)$ et $(\theta = 30^\circ, \beta = 45^\circ)$.

La position $(\theta = 0, \beta = 0)$ est traduite par la relation : $R_1 + \lambda_{\min} = D$

La position $(\theta = 30^\circ, \beta = 45^\circ)$ est traduite par les relations :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} R_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{\max} = D \text{ et } \frac{1}{2} R_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda_{\max} = 0$$

Tout calcul fait, on montre :

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) R_1, \quad \lambda_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_1 \text{ et } D = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) R_1$$

A.7. Exprimer, en fonction de D et de R_1 , la course C_0 effectuée par le centre A du galet (3) sachant que celle-ci est définie par la relation : $C_0 = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$. Donner les valeurs numériques des rapports $\left(\frac{D}{R_1}\right)$ et $\left(\frac{C_0}{R_1}\right)$. En quoi ces rapports pourront être utiles ?

$$C_0 = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_1 + \frac{1}{2} R_1 = \frac{R_1}{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{2}) + D$$

$$\left(\frac{D}{R_1}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = 1.366$$

$$\left(\frac{C_0}{R_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{2}) + \left(\frac{D}{R_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = 1.073$$

Il suffit de fixer une dimension, on peut en déduire les autres

A.8. Utiliser la loi entrée-sortie de la question A.5, pour déterminer la vitesse et l'accélération angulaires de l'ensemble (2) par rapport au bâti (0) correspondant à la position $(\theta = 0, \beta = 0)$; les exprimer en fonction de R_1, ω et D .

$$\tan \beta = \frac{R_1 \sin \theta}{D - R_1 \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\beta}(1 + \tan^2 \beta) = \frac{R_1 \omega \cos \theta}{D - R_1 \cos \theta} - \frac{R_1^2 \omega \sin^2 \theta}{(D - R_1 \cos \theta)^2}$$

Compte tenu des valeurs des deux angles on montre que:

$$\dot{\beta} = \frac{R_1 \omega}{D - R_1}$$

Le développement des calculs donne : $\ddot{\beta} = 0$

2-. Étude dynamique

Dans cette partie, les calculs à développer se rapportent à un fonctionnement normal du mécanisme, lorsque celui-ci se trouve instantanément dans la position de passage ($\theta = 0, \beta = 0$).

A.9. Déterminer le torseur dynamique au point **B** de l'ensemble (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0) ; l'exprimer en fonction de m_2, r_2, E_2, R_1, D et ω .

Le torseur dynamique est définie au point B par : $\{D_{2/0}\}_B = \{\vec{R}_{2/0} | \vec{\delta}_{B/0}\}$

Avec $\vec{R}_{2/0} = m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/0} = m_2 r_2 (\dot{\beta}^2 \vec{x}_2 - \ddot{\beta} \vec{y}_2)$ et $\vec{\delta}_{B/0} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_{B/0})$

$$\vec{\sigma}_{B/0} = [I_2]_B \cdot \vec{\Omega}_{2/0} = -E_2 \dot{\beta} \vec{x}_2 + C_2 \dot{\beta} \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_{B/0} = -E_2 \ddot{\beta} \vec{x}_2 + E_2 \dot{\beta}^2 \vec{y}_2 + C_2 \ddot{\beta} \vec{z}_0$$

Dans la position ($\theta = 0, \beta = 0$)

La résultante : $\vec{R}_{2/0} = m_2 \vec{\Gamma}_{G_2/0} = m_2 r_2 \dot{\beta}^2 \vec{x}_0 = m_2 r_2 \left(\frac{R_1 \omega}{D - R_1} \right)^2 \vec{x}_0$

Le moment dynamique en B s'écrit : $\vec{\delta}_{B/0} = E_2 \left(\frac{R_1 \omega}{D - R_1} \right)^2 \vec{y}_0$

$$\{D_{2/0}\}_B = \left\{ \vec{R}_{2/0} = m_2 r_2 \left(\frac{R_1 \omega}{D - R_1} \right)^2 \vec{x}_0 \mid \vec{\delta}_{B/0} = E_2 \left(\frac{R_1 \omega}{D - R_1} \right)^2 \vec{y}_0 \right\}$$

A.10. Modéliser, sous forme de torseurs calculés au point **B**, toutes les actions extérieures s'exerçant sur l'ensemble (2) (les bases de projections devront être précisées).

♦ Action de la pesanteur au point B : $\{\tau_{pe/2}\}_B = \{\vec{P}_2 | \vec{M}_{B(pe/2)}\}$

$$\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{z}_0$$

$$\vec{M}_{B(pe/2)} = \vec{BG}_2 \wedge \vec{P}_2 = -(r_2 \vec{x}_2 + h \vec{z}_0) \wedge m_2 g \vec{z}_0 = m_2 g r_2 \vec{y}_2$$

Dans la position ($\theta = 0, \beta = 0$), le torseur admettra pour expression :

$$\{\tau_{pe/2}\}_B = \{-m_2 g \vec{z}_0 | m_2 g r_2 \vec{y}_0\}$$

♦ Action du bâti (0) au point B

$$\{\tau_{0/2}\}_B = \{\vec{F}_{0/2} = X_B \vec{x}_0 + Y_B \vec{y}_0 + Z_B \vec{z}_0 | \vec{M}_{B(0/2)} = L_B \vec{x}_0 + M_B \vec{y}_0\}$$

◆ couple résistant :

$$\{\tau_{r/2}\}_B = \{\vec{F}_{r/2} = \vec{0} | \vec{C}_f = C_f \vec{z}_0\}$$

◆ Action ponctuelle du galet (3)

$$\{\tau_{3/2}\}_B = \{\vec{F}_{3/2} = F_I \vec{y}_2 | \vec{M}_{B(3/2)} = \vec{BI} \wedge F_I \vec{y}_2\}$$

$$\text{Avec } \vec{BI} = \vec{BA} + \vec{AI} = -\lambda \vec{x}_2 + r_3 \vec{y}_2$$

$$\text{Cela conduit à } \vec{M}_{B(3/2)} = (-\lambda \vec{x}_2 + r_3 \vec{y}_2) \wedge F_I \vec{y}_2 = -\lambda F_I \vec{z}_0$$

Dans la position ($\theta = 0, \beta = 0$), le torseur admettra pour expression :

$$\{\tau_{3/2}\}_B = \{F_I \vec{y}_0 | -F_I \lambda_{\min} \vec{z}_0\}$$

A.11. Écrire les équations dynamiques qui découlent du théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble (2) dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 .

Théorème de la résultante dynamique $\rightarrow \vec{x}_0 / \vec{x}_B = m_2 r_2 \left(\frac{R_1 \omega}{D - R_1} \right)^2$; $\vec{y}_0 / Y_B + F_I = 0$;

$$\vec{z}_0 / Z_B - m_2 g = 0$$

A.12. Écrire les équations dynamiques qui découlent du théorème du moment dynamique appliqué à l'ensemble (2) dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 .

Théorème du moment dynamique $\rightarrow$

$$L_B = 0$$

$$M_B + m_2 g r_2 + E_2 \left(\frac{R_1 \omega}{D - R_1} \right)^2 = 0$$

$$-F_I (D - R_1) + C_f = -F_I \lambda_{\min} + C_f = 0$$

A.13. Déterminer l'expression de l'action ponctuelle F_I ; et l'exprimer en fonction de C_f , D et R_1 .

$$F_I = \frac{C_f}{\lambda_{\min}} = \frac{C_f}{D - R_1}$$

3-. Étude Énergétique

A.14. Déterminer la puissance développée par l'action ponctuelle du galet au point de contact I , dans le mouvement du maneton (1) par rapport au bâti (0). Que devient cette puissance dans la position instantanée ($\theta = 0, \beta = 0$) ?

$$P_u(\vec{F}_I) = \vec{F}_I \cdot \vec{V}_{A/0} = F_I \vec{y}_2 \cdot R_1 \dot{\theta} \vec{y}_1$$

Dans la position ($\theta = 0, \beta = 0$) : $\vec{y}_2 = \vec{y}_1 = \vec{y}_0$

La puissance instantanée à l'instant de passage est alors :

$$P_u(\vec{F}_I) = F_I R_1 \omega = \frac{C_f R_f \omega}{D - R_1}$$

A.15. Calculer la puissance motrice développée par le moteur à l'entrée du réducteur.

$$P_m(C_m) = C_m \omega_m$$

A.16. Dédurre le couple développé par le moteur ; et l'exprimer en fonction de η_r, ρ_r, C_f, R_1 et D .

$$\eta_r = \frac{C_f R_1 \omega}{(D - R_1) C_m \omega_m} = \frac{\rho_r C_f R_1}{(D - R_1) C_m}$$

On en déduit :

$$C_m = \frac{\rho_r C_f R_1}{\eta_r (D - R_1)}$$

4-. Résistance des Matériaux

A.17. Déterminer les expressions des actions mécaniques extérieures appliquées à l'axe aux points A, B et C (Figure 7).

$$\{\tau_A\}_O + \{\tau_B\}_O + \{\tau_C\}_O + \{\tau_{ext}\}_O = \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{mr} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_O + \begin{pmatrix} 0 \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -Z_A \cdot L \\ Y_A \cdot L \end{pmatrix}_O + \begin{pmatrix} 0 \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -Z_C \cdot 2L \\ Y_C \cdot 2L \end{pmatrix}_O + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta F \\ F \cdot \frac{7}{4} L \\ 0 \end{pmatrix}_O = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_A + Y_c = 0 \\ Z_A + Z_c - F = 0 \\ C_{mr} - \delta F = 0 \\ -Z_A \cdot L - Z_c \cdot 2L + \frac{7}{4}L \cdot F = 0 \\ Y_A \cdot L + Y_c \cdot 2L = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{mr} = \delta F \\ Y_A + Y_c = 0 \\ Y_A + 2 \cdot Y_c = 0 \\ Z_A + 2 \cdot Z_c = \frac{7}{4}F \\ Z_A + Z_c = F \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{mr} = \delta F \\ Y_A = Y_c = 0 \\ Z_c = \frac{3}{4}F \\ Z_A = \frac{1}{4}F \end{array} \right.$$

A.18. Calculer ces actions aux points A, B et C

$$\Rightarrow \text{A. N : } \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{C_{mr}}{\delta} = \frac{120 \text{ N.m}}{60 \text{ mm}} = 200 \text{ N} \\ Y_A = 0 \\ Y_c = 0 \\ Z_c = \frac{3}{4}F = 150 \text{ N} \\ Z_A = \frac{1}{4}F = 50 \text{ N} \end{array} \right.$$

A.19. Déterminer les expressions des efforts de cohésion tout le long de l'axe :

♦ Tronçon OA : $0 < x < 80 \text{ mm}$

$$\{\tau_{coh}\}_o + \{\tau_{ext}\}_o = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) \\ T_y(x) \\ T_z(x) \end{array} \middle| \begin{array}{l} M_x(x) \\ M_{fy}(x) - x \cdot T_z(x) \\ M_{fz}(x) + x \cdot T_y(x) \end{array} \right\}_o + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} C_{mr} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_o = \{0\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N(x) = 0 \\ T_y(x) = 0 \\ T_z(x) = 0 \\ M_x(x) = -C_{mr} \\ M_{fy}(x) = 0 \\ M_{fz}(x) = 0 \end{array} \right.$$

- ♦ Tronçon AB : $80 \text{ mm} < x < 140 \text{ mm}$

$$\{\tau_{coh}\}_O + \{\tau_{ext}\}_O + \{\tau_A\}_O = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} N(x) \\ T_y(x) \\ T_z(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x(x) \\ M_{fy}(x) - x.Tz(x) \\ M_{fz}(x) + x.Ty(x) \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} 0 \\ Y_A = 0 \\ Z_A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -Z_A.L \\ 0 \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{mr} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_O = \{0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 \\ T_y(x) + Y_A = 0 \\ T_z(x) + Z_A = 0 \\ M_x(x) = -C_{mr} \\ M_{fy}(x) - x.Tz(x) - Z_A.L = 0 \\ M_{fz}(x) + x.Ty(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 \\ T_y(x) = 0 \\ T_z(x) = -Z_A = -\frac{1}{4}F \\ M_x(x) = -C_{mr} \\ M_{fy}(x) = Z_A.(x-L) = \frac{1}{4}F.(x-L) \\ M_{fz}(x) = 0 \end{cases}$$

- ♦ Tronçon BC : $140 \text{ mm} < x < 160 \text{ mm}$

$$\{\tau_{coh}\}_O + \{\tau_{ext}\}_O = \{0\}$$

$$-\begin{Bmatrix} N(x) \\ T_y(x) \\ T_z(x) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x(x) \\ M_{fy} - Tz.(2L-x) \\ M_{fz} + Ty.(2L-x) \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} 0 \\ Y_c \\ Z_c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_C = \{0\}$$

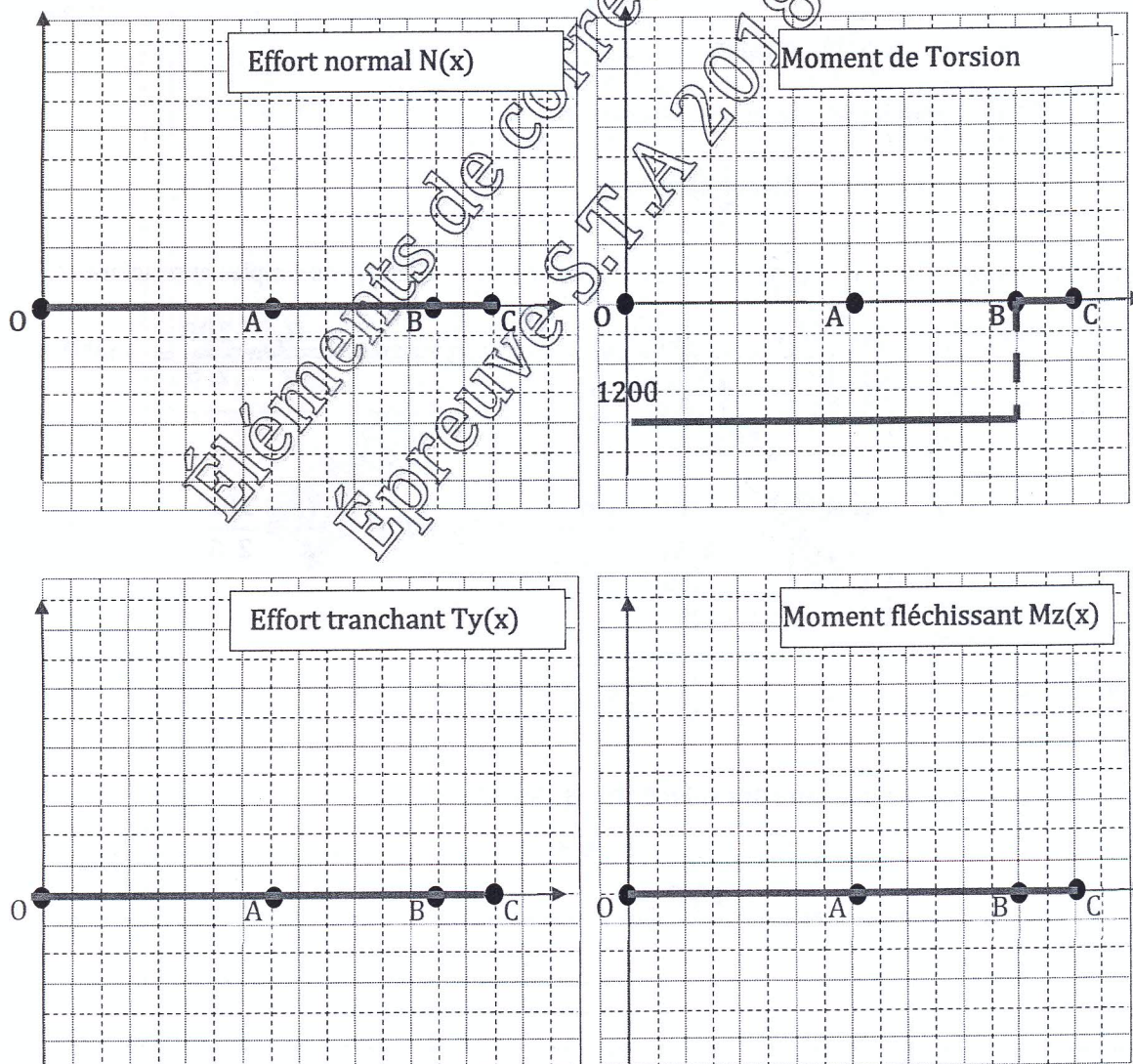
$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ -T_y(x) + Y_c = 0 \\ -T_z(x) + Z_c = 0 \\ M_x(x) = 0 \\ M_{fy}(x) - Tz.(2L-x) = 0 \\ M_{fz}(x) + Ty.(2L-x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T_y(x) = Y_c \\ T_z(x) = Z_c \\ M_x(x) = 0 \\ M_{fy}(x) = Tz.(2L-x) \\ M_{fz}(x) = 0 \end{cases}$$

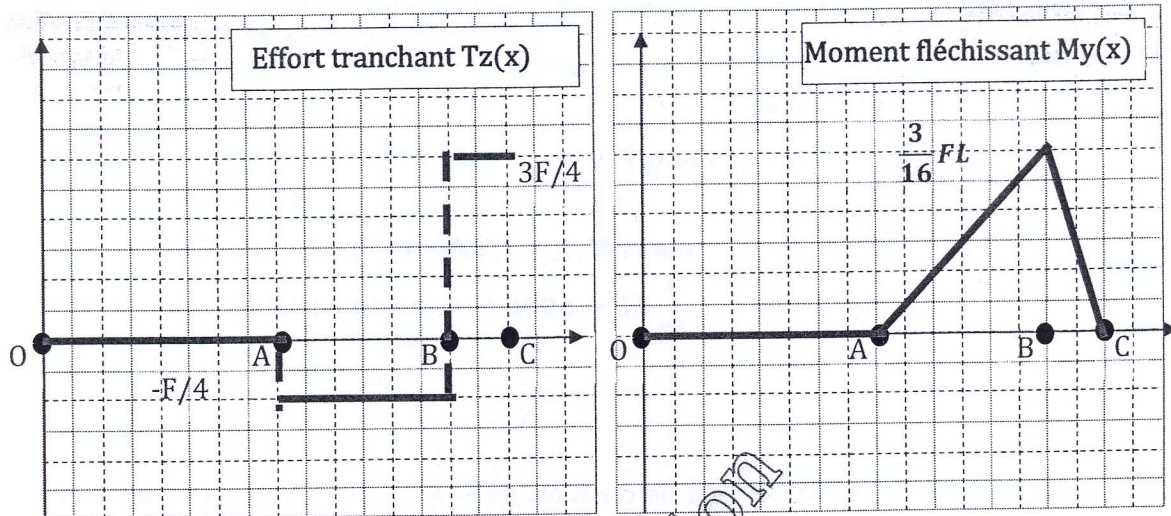
$$\Rightarrow \begin{cases} N = 0 \\ T_y(x) = 0 \\ T_z(x) = \frac{3}{4}F \\ M_x(x) = 0 \\ M_{fy}(x) = \frac{3}{4}F.(2L-x) \\ M_{fz}(x) = 0 \end{cases}$$

A.20. Calculer les valeurs particulières des efforts internes tout le long de l'axe.

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ \max \|T_z\| = \frac{3}{4} F = 150 \text{ N} \\ \max \|M_x\| = 1.2 \text{ N.m} \\ \max \|M_{fy}\| = \frac{3}{16} FL = 6000 \text{ N.mm (au point B)} \end{array} \right.$$

A.21. Tracer les diagrammes des efforts de cohésion, tout en précisant toutes les indications nécessaires à la bonne lecture des diagrammes (titres, axes, unités, échelle).





A.22. Identifier la nature des sollicitations appliquées à l'axe.

- ◆ Tronçon OA : torsion
- ◆ Tronçon BC : torsion + flexion
- ◆ Tronçon BC : flexion simple

A.23. Vérifier les conditions de résistance pour chacune des sollicitations simples et conclure.

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M_{fy}}{(I_{Gz}/v)} = \frac{\max M_{fy}}{(\frac{\pi D^3}{32})} = \frac{6000 \text{ N.mm}}{(\frac{\pi \cdot 12^3}{32}) \text{ mm}^3} = 35.37 \text{ MPa} < \frac{R_e}{s} = \frac{200}{2.5} = 80 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\max M_x}{(I_{G0}/v)} = \frac{\max M_x}{(\frac{\pi D^3}{16})} = \frac{1200 \text{ N.mm}}{(\frac{\pi \cdot 12^3}{16}) \text{ mm}^3} = 3.53 \text{ MPa} < \frac{\tau_e}{s} = \frac{100}{2.5} = 40 \text{ MPa}$$

Conclusion

La structure résiste à chacune des sollicitations simples.

.....

.....

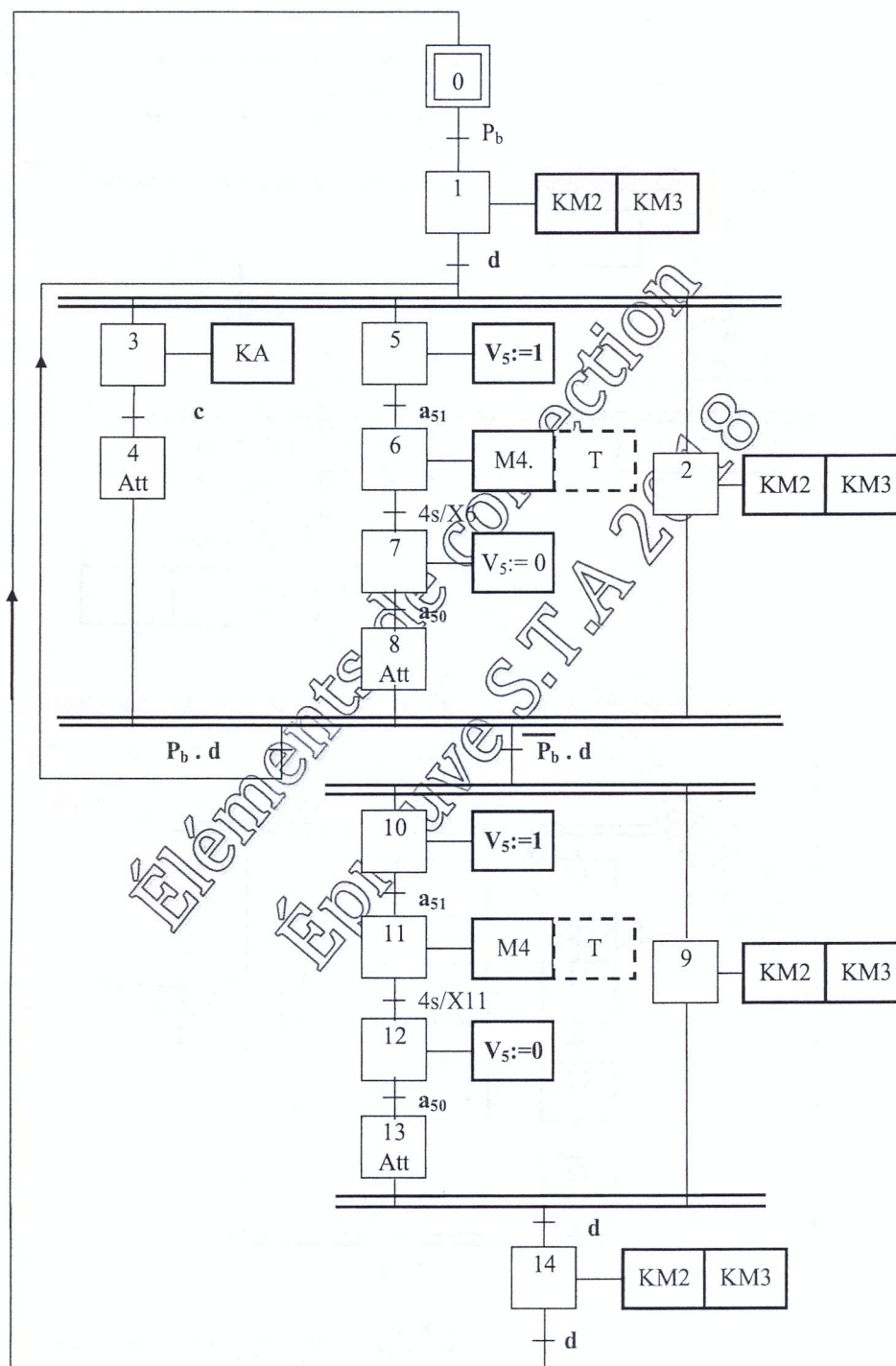
.....

.....

Partie B : Automatique

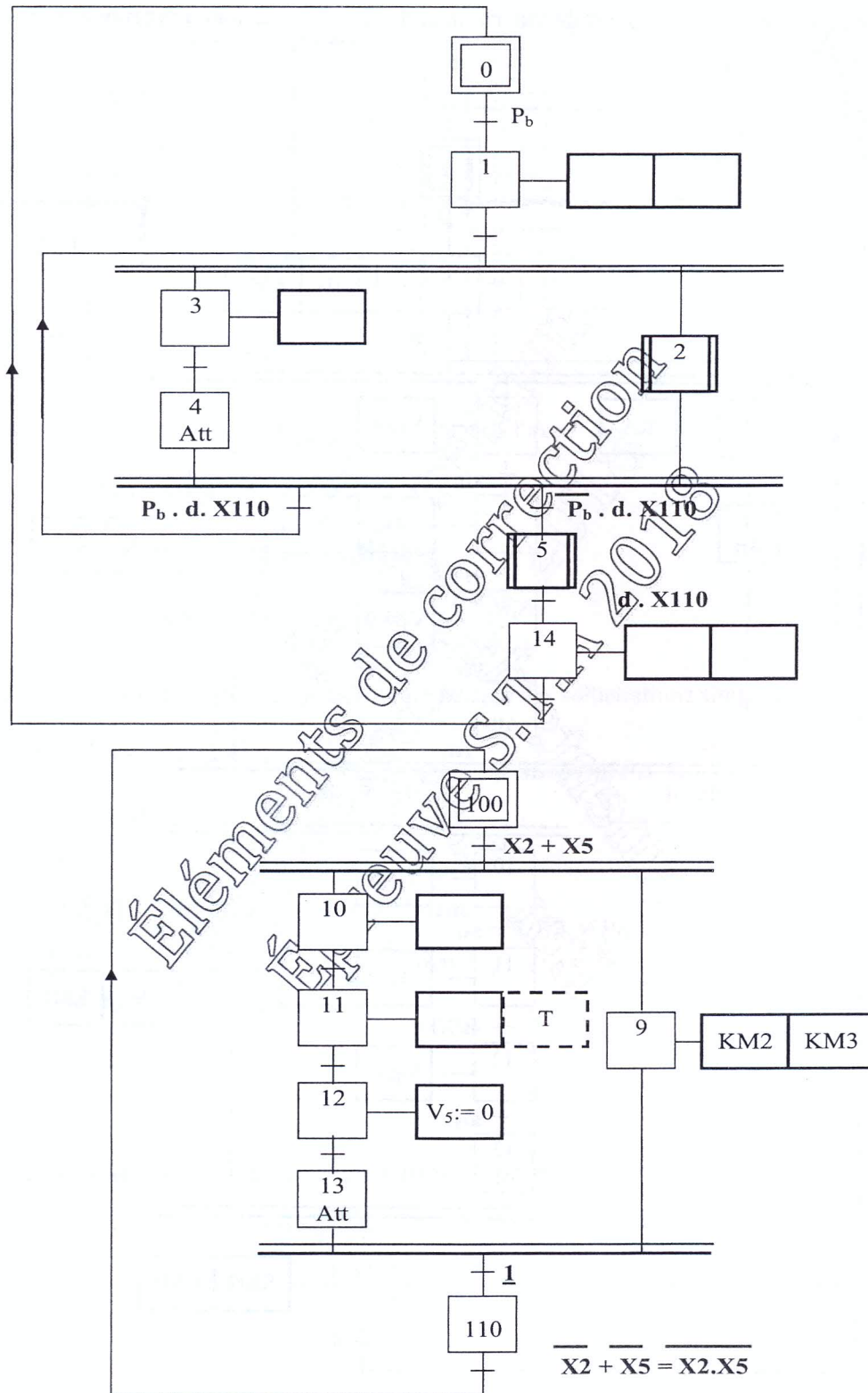
1-. Étude séquentielle de l'unité de bouchage des bouteilles

B.1. Compléter le grafcet de point de vue commande, décrivant le fonctionnement de l'unité de bouchage de bouteilles.



Grafcet de point de vue commande de l'unité de bouchage

B.2. On propose une deuxième solution utilisant les macro-tâches. Compléter les grafkets, ci-dessous, de point de vue commande (seulement les 5 réceptivités en pointillées).



Grafket de point de vue commande de l'unité d bouchage avec « Macro tâche »

2. Régulation du niveau du liquide dans la cuve de stockage alimentant les bouteilles

B.3. En se référant à la Figure 9, aux équations de (1) à (6) et à la Figure 10 du document «mise en situation, données et hypothèses», déterminer les expressions analytiques des différents blocs fonctionnels de la Figure 11.

$$G_1(p) = \dots\dots\dots k_c \dots\dots\dots$$

$$G_2(p) = \dots\dots\dots A_1 \dots\dots\dots$$

$$G_3(p) = \dots\dots\dots \frac{K_m}{1 + \tau_m \cdot p} \dots\dots\dots$$

$$G_4(p) = \dots\dots\dots \frac{1}{p} \dots\dots\dots$$

$$G_5(p) = \dots\dots\dots r \dots\dots\dots$$

$$G_6(p) = \dots\dots\dots k_1 \dots\dots\dots$$

$$G_7(p) = \dots\dots\dots \frac{1}{s \cdot p} \dots\dots\dots$$

$$G_8(p) = \frac{1}{S \cdot p}$$

$$G_9(p) = \dots\dots\dots k_s \dots\dots\dots$$

B.4. En déduire les expressions numériques de $G_1(p)$, $G_3(p)$, $G_4(p)$, $G_5(p)$, $G_6(p)$, $G_7(p)$, $G_8(p)$ et $G_9(p)$:

$$G_1(p) = \dots\dots\dots 20 \dots\dots\dots$$

$$G_3(p) = \dots\dots\dots \frac{0.5}{1 + 0.1p} \dots\dots\dots$$

$$G_4(p) = \dots\dots\dots \frac{1}{p} \dots\dots\dots$$

$$G_5(p) = \dots\dots\dots 0.05 \dots\dots\dots$$

$$G_6(p) = \dots\dots\dots 0.1 \dots\dots\dots$$

$$G_7(p) = \dots\dots\dots \frac{1}{0.5p} \dots\dots\dots$$

$$G_8(p) = \dots\dots\dots \frac{1}{0.5p} \dots\dots\dots$$

$$G_9(p) = \dots\dots\dots 20 \dots\dots\dots$$

B.5. Pour $q_2(t) = 0$, montrer que la fonction de transfert $T_1(p)$ est donnée par :

$$T_1(p) = \frac{V_s(p)}{V_c(p)} = \frac{A_1}{p^3 + 10p^2 + A_1}$$

$$T_1(p) = \frac{G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 G_7 G_9}{1 + G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 G_7 G_9} = \frac{\frac{A_1 K_m r k_1 k_s}{Sp^2(1 + \tau_m p)}}{1 + \frac{A_1 K_m r k_1 k_s}{Sp^2(1 + \tau_m p)}} = \frac{A_1 K_m r k_1 k_s}{Sp^2(1 + \tau_m p) + A_1 K_m r k_1 k_s}$$

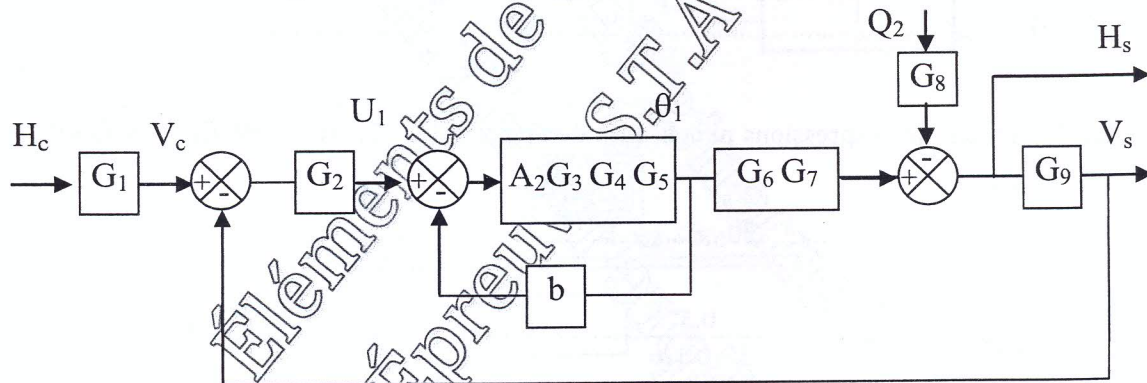
$$= \frac{A_1}{\frac{S}{K_m r k_1 k_s} p^2 + \frac{S \tau_m}{K_m r k_1 k_s} p^3 + A_1} = \frac{A_1}{\frac{0.5}{0.05} p^2 + \frac{0.05}{0.05} p^3 + A_1}$$

$$\rightarrow T_1(p) = \frac{A_1}{p^3 + 10p^2 + A_1}$$

B.6. Étudier et justifier la stabilité du système de fonction de transfert $T_1(p)$.

Le système est instable, absence du coefficient en P^1

B.7. En se référant à la Figure 12, compléter le schéma fonctionnel du nouvel asservissement.



B.8. Montrer que la fonction de transfert $G(p) = \frac{\theta_1(p)}{U_1(p)}$ est donnée par :

$$G(p) = \frac{\theta_1(p)}{U_1(p)} = \frac{0.05}{1 + \frac{p}{0.5A_2} + \frac{p^2}{5A_2}}$$

$$G(p) = \frac{\theta_1(p)}{U_1(p)} = \frac{A_2 G_3 G_4 G_5}{1 + b A_2 G_3 G_4 G_5} \dots\dots\dots$$

$$\rightarrow G(p) = \frac{r K_m A_2}{p(1 + \tau_m p) + r b K_m A_2} = \frac{r K_m A_2}{\tau_m p^2 + p + r b K_m A_2} \Rightarrow G(p) = \frac{0.05}{\frac{1}{5A_2} p^2 + \frac{1}{0.5A_2} p + 1}$$

B.9. En déduire les expressions du gain statique K , de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ en fonction de A_2 .

..... $K = \dots\dots 0.05 \dots\dots$

$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{5A_2}$

$\omega_0 = \sqrt{5A_2}$

$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{0.5A_2} \Rightarrow \xi = \frac{1}{A_2} \omega_0 = \frac{\sqrt{5A_2}}{A_2}$

$\xi = \dots\dots \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{A_2}} \dots\dots$

B.10. Calculer A_2 pour avoir le temps de réponse le plus rapide de $\theta_1(t)$

le temps de réponse le plus rapide $\Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{A_2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{5}{A_2} = \frac{1}{2}$

..... $A_2 = 10$

B.11. Pour $q_2(t) = 0$, en considérant une valeur de $A_2 = 10$, étudier la stabilité du système de

fonction de transfert $T_2(p) = \frac{H_s(p)}{H_c(p)} = \frac{G_2(p) G(p) G_6(p) G_7(p)}{1 + G_2(p) G(p) G_6(p) G_7(p) G_9(p)} G_1(p)$ en fonction de A_1 .

$$T_2(p) = \frac{G_2 G G_6 G_7}{1 + G_2 G G_6 G_7 G_9} G_1 \Rightarrow T_2(p) = \frac{0.05A_1 k_1 k_c}{Sp\left(\frac{1}{5A_2} p^2 + \frac{1}{0.5A_2} p + 1\right) + 0.05A_1 k_1 k_s}$$

$$= \frac{0.05A_1 k_1 k_c}{\frac{0.1}{A_2} p^3 + \frac{1}{A_2} p^2 + 0.5p + 0.05A_1 k_1 k_s} \Rightarrow T_2(p) = \frac{0.1A_1}{0.01p^3 + 0.1p^2 + 0.5p + 0.1A_1}$$

Équation caractéristique :

..... $0.01p^3 + 0.1p^2 + 0.5p + 0.1A_1 = 0$

Tableau de Routh:

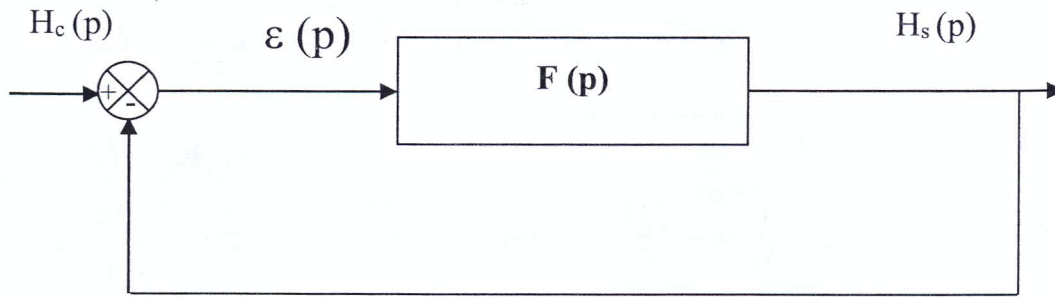
p^3	0.01	0.5
p^2	0.1	$0.1A_1$
p^1	$0.5 - 0.01A_1$	0
p^0	$0.1A_1$	X

Conclure sur la stabilité :

A_1 étant un réel positif, le système est stable si et seulement si

$0.5 - 0.01A_1 > 0$ soit $0.5 > 0.01A_1 \Rightarrow 0 < A_1 < 50$

Pour la suite de cette étude, on considère le schéma fonctionnel suivant, où $k_s = k_c$ et $A_2 = 10$:



B.12. Déterminer la fonction de transfert $F(p)$ en fonction de A_1 .

$$F(p) = G_1 G_2 G_6 G_7 \dots\dots\dots$$

$$F(p) = \frac{k_c A_1 0.05 k_1}{Sp \left(\frac{1}{5A_2} p^2 + \frac{1}{0.5A_2} p + 1 \right)} = \frac{0.2A_1}{p \left(\frac{1}{5A_2} p^2 + \frac{1}{0.5A_2} p + 1 \right)}$$

B.13. En se basant sur la question B.12, calculer en fonction de A_1 , l'erreur de position unitaire

$\varepsilon_p(\infty)$ et l'erreur de vitesse unitaire $\varepsilon_v(\infty)$.

Système de classe 1

$$\varepsilon_p(\infty) = 0 \dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{1}{0.2A_1}$$

B.14. On veut que l'erreur de vitesse $\varepsilon_v(\infty)$ ne dépasse pas les 12.5%, préciser dans quel

intervalle doit-on alors choisir A_1 .

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{1}{0.2A_1} \leq 0.125 \Rightarrow A_1 \geq 40 \text{ ayant comme condition de stabilité } A_1 < 50 \text{ donc}$$

pour avoir une erreur de vitesse $\varepsilon_v(\infty)$ qui ne dépasse pas les 12,5%, $\Rightarrow A_1 \in [40 ; 50[$.