



Concours Technologie Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Problème 1

Partie I :

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 -\ln(t) t^n dt$ et $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$.

1. On pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t^2-1}$. On a :
 - f est continue sur $]0,1[$.
 - $f(t) \sim -\ln(t)$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(t) dt$ converge.
 - $f(t) \sim \frac{1}{2}$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} dt$ converge.

En utilisant le critère d'équivalence, on en déduit l'existence de I .

2. On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = -\frac{1}{2}$ et g est continue sur $]0,1[$. Alors g se prolonge par continuité sur $[0,1]$ par la fonction $\tilde{g}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & \text{si } t \in]0,1[, \\ 0, & \text{si } t = 0, \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Il existe alors $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1], |\tilde{g}(t)| \leq M$.

3. On a :

$$\begin{aligned} \left| I - \sum_{k=0}^n u_{2k} \right| &= \left| \int_0^1 t^{2n+2} \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 t^{2n+1} g(t) dt \right| \leq M \int_0^1 t^{2n+1} dt = \frac{M}{2n+2}. \end{aligned}$$

4. Une intégration par parties donne $u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$. On obtient ainsi :

$$\left| I - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \right| = \frac{M}{2n+2}.$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = I.$$

Partie II :

1. On pose $\varphi(x, t) = \frac{\arctan(\frac{x}{t})}{(1+t^2)}$. φ est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. On sait que $\forall t > 0$, et $x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x, t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ et que $\int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2(1+t^2)} dt$ converge alors F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
 $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(t)}{(1+t^2)} dt = \left[\frac{\pi}{2} \arctan(t) - \frac{1}{2} \arctan^2(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}.$

2. φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) &= \frac{1}{t(1+t^2) \left(1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)(t^2+x^2)}. \end{aligned}$$

Soit $a > 0$. On a pour tout $x \geq a$,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)(t^2+a^2)} = \Psi(t).$$

Ψ est continue sur $[0, +\infty[$, de plus $\Psi(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3}$. D'où F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(t^2+x^2)} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{(1+t^2)} - \frac{t}{(t^2+x^2)} \right) dt. \end{aligned}$$

3. Un calcul simple montre que $F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$. Comme $F(0) = 0$ alors

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt.$$

4. On a $I = F(1) = \frac{\pi^2}{8}$. Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

D'autre part, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On a :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X(X+1)^2} = \frac{1+X-X}{X(X+1)^2} = \frac{1}{X(X+1)} - \frac{1}{(X+1)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}. \end{aligned}$$

6. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Partie III :

1. On a :

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=n, Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}} \\ &= \frac{\lambda}{(n+1)^3} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &= \frac{\lambda}{n(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$ on en déduit que $\lambda = \frac{1}{2 - \frac{\pi^2}{6}}$.

2. La série de terme général $nP(X=n) = \frac{\lambda}{(n+1)^2}$ est convergente, donc X admet une espé-

rance $E(X)$ et

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)^2} \\ &= \lambda \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = \frac{\frac{\pi^2}{6} - 1}{2 - \frac{\pi^2}{6}}. \end{aligned}$$

3. La série de terme général $n^2 P(X=n) = \frac{\lambda n}{(n+1)^2}$ est divergente, donc X n'admet pas de variance.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n, Y=k) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(n+1)^{k+3}} \\ &= \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}} = \lambda (H(k+3) - 1). \end{aligned}$$

5. On a : $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda (H(k+3) - 1) = \lambda \sum_{k=3}^{+\infty} (H(k) - 1) = 1$. Alors :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} (H(k) - 1) = \frac{1}{\lambda} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit que $\sum_{k=2}^{+\infty} (H(k) - 1) = 1$.

6. On a $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x$.

On pose $u_n(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x = e^{x \ln(\frac{2}{n})} \leq \frac{4}{n^2}$ pour $x \geq 2$. Donc la série $\sum u_n(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[2, +\infty[$. On en déduit alors que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x = 1.$$

7. D'après la question précédente $H(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{-x}$. Par conséquent $v_k = P(Y = k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda 2^{-(k+3)}$.

8. Les séries de termes généraux $kP(Y = k) = \frac{\lambda k}{2^{k+3}}$ et $k^2 P(Y = k) = \frac{\lambda k^2}{2^{k+3}}$ sont convergentes, donc Y admet une espérance et une variance.

Problème 2

Partie I :

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note ${}^t A = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec $b_{ij} = a_{ji}$ pour tout (i, j) . On note ${}^t A.A = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$. D'où :

$$\text{Tr}({}^t A.A) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ki})^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{ij})^2.$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ alors $\begin{cases} {}^t A.A = I, \\ \det(A) = 1, \end{cases}$

et par suite $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1, \\ c^2 + d^2 = 1, \\ ad - bc = 1. \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \exists \beta \in \mathbb{R} / a = \cos \beta, b = \sin \beta, \\ \exists \theta \in \mathbb{R} / c = \sin \theta, d = \cos \theta, \\ \cos(\theta + \beta) = 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \theta + \beta = 2k\pi, \end{cases}$ ainsi

$$\begin{cases} \cos \beta = \cos(2k\pi - \theta) = \cos \theta, \\ \sin \beta = \sin(2k\pi - \theta) = -\sin \theta, \end{cases}$$

et par suite A est de la forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R}$.

3. Soient θ_1 et θ_2 deux réels. On a :

$$\begin{aligned} R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} = R_{\theta_1 + \theta_2}. \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence montre que pour tout entier naturel k on a : $(R_\theta)^k = R_{k\theta}$.

Partie II :

On considère l'application $f : SL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; A \mapsto \text{Tr}({}^t A \cdot A)$.

1. Dans cette question $n = 2$.

(a) On a $(a - d)^2 \geq 0$ alors $a^2 + d^2 \geq 2ad$. De la même manière on aura $-2bc \leq b^2 + c^2$.

Donc pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, on a :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ad - bc) = 2.$$

C'est à dire $f(A) \in [2, +\infty[$.

(b) Si $f(A) = 2$ alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2 = 2(ad - bc)$ alors

$$(a - d)^2 + (b + c)^2 = 0.$$

Donc $a = d$ et $b = -c$. Comme $\det A = 1$ alors $a^2 + b^2 = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \text{ c'est à dire } A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}).$$

La condition suffisante est triviale.

(c) On a $f(M_x) = 2 + x^2$. On en déduit que $\forall y \geq 2, y = f(M_{\sqrt{y-2}})$.

Par suite $\text{Im} f = [2, +\infty[$.

2. Soit $A \in \mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ les colonnes de A .

(a) On utilise la question 1. de la partie I, on trouve :

$$f(A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_{ij})^2 = \sum_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|^2.$$

(b) En utilisant l'inégalité de Hadamard, on a :

$$1 = |\det(A)| \leq \|X_1\| \dots \|X_n\|,$$

$$\text{donc } 1 \leq \prod_{i=1}^n \|X_i\|^2. \text{ Par suite, } 1 \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \|X_i\|^2}.$$

(c) Par l'inégalité arithmético-géométrique on obtient :

$$1 \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \|X_i\|^2} \leq \frac{\|X_1\|^2 + \dots + \|X_n\|^2}{n} = \frac{f(A)}{n}.$$

Donc $f(A) \geq n$ et par suite $\text{Im} f \subset [n, +\infty[$.

(d) Si $f(A) = n$ alors $1 \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \|X_i\|^2} \leq \frac{\|X_1\|^2 + \dots + \|X_n\|^2}{n} = 1$ et par suite $\det(A) = 1$ et $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \|X_i\|^2} = \frac{\|X_1\|^2 + \dots + \|X_n\|^2}{n}$.

C'est les cas des égalités dans les inégalités de Hadamard et l'inégalité arithmético-géométrique, on en déduit que la famille $\{X_1, \dots, X_n\}$ est orthonormale.

(e) Si $A \in f^{-1}(\{n\})$ alors $f(A) = n$ et par suite $\det(A) = 1$ et la famille $X_1, X_2, \dots, X_n$ des colonnes de A est orthonormale. Donc $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement si $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ $f(A) = \text{Tr}(^t A A) = n$.

(f) D'après la question II)2)b) on a $\text{Im}(f) \subset [n, \infty[$. Réciproquement en s'inspirant de la question II)1)d) nous considérons la matrice

$$M_y = I_n + \sqrt{y-n} E_{12}, \text{ on obtient } f(M_y) = y, \text{ donc } \text{Im} f = [n, +\infty[.$$

Partie III :

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) A est symétrique à coefficients réels donc d'après le théorème spectral il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ diagonale tel que $A = P.D.^t P$.

- (b) Comme $D = (\text{diag}(\sqrt[3]{\lambda_1}, \sqrt[3]{\lambda_2}, \dots, \sqrt[3]{\lambda_n})^3 =: D_1^3$.
 $M = P.D_1.^tP$ répond à la question. Ceci montre aussi que l'application h est surjective.

2. Soit M et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que $h(M) = h(N) = A$. Soit $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de M .

- (a) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et $X \neq 0$ tel que $X \in E_{\lambda_i}(M)$ on a :
 $MX = \lambda_i X \Rightarrow M^3 X = A X = \lambda_i^3 X \Rightarrow X \in E_{\lambda_i^3}(A)$.
 Par suite on a : $E_{\lambda_i}(M) \subset E_{\lambda_i^3}(A)$.

- (b) Le fait que $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(M)$.

D'autre part on a : $E_{\lambda_i}(M) \subset E_{\lambda_i^3}(A)$ et en utilisant le fait que si $i \neq j$, $\lambda_i^3 \neq \lambda_j^3$ alors

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(M) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i^3}(A).$$

Par suite $\sum_{i=1}^p [\dim(E_{\lambda_i^3}(A)) - \dim(E_{\lambda_i}(M))] = 0$ et en utilisant la question III)2)a) on en déduit que $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $\dim(E_{\lambda_i^3}(A)) = \dim(E_{\lambda_i}(M))$ et on conclut que $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $E_{\lambda_i^3}(A) = E_{\lambda_i}(M)$.

- (c) D'après la question précédente, on en déduit que l'ensemble des valeurs propres de A est $\{\lambda_1^3, \lambda_2^3, \dots, \lambda_p^3\}$.

Soit α une valeur propre de N alors α^3 est une valeur propre de $N^3 = A$. Ainsi $\exists i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha^3 = \lambda_i^3$ et par la suite $\alpha = \lambda_i$ est une valeur propre de M .

- (d) D'après ce qui précède $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $E_{\lambda_i}(M) = E_{\lambda_i}(N)$ alors $M = N$. On conclut que l'application h est injective et par suite h est bijective.

3. Il est clair que -1 et 8 sont les valeurs propres de A et $E_{-1} = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ et $E_8 = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ répond à la question.}$$

Partie IV :

1. Soit $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Si $a > 0$, alors $A = aR_{\frac{\pi}{2}}$. sinon $A = -aR_{-\frac{\pi}{2}}$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda R_{\frac{\pi}{2}}$ ou bien $A = \lambda R_{-\frac{\pi}{2}}$.

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $g_p(R_\theta) = R_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow (R_\theta)^p = R_{p\theta} = R_{\frac{\pi}{2}}$.
 $\theta = \frac{\pi}{2p}$ répond à la question.

(c) S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda R_{\frac{\pi}{2}}$. On choisit $M = \sqrt[p]{\lambda} R_{\frac{\pi}{2p}}$.
 S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda R_{-\frac{\pi}{2}}$. On choisit $M = \sqrt[p]{\lambda} R_{-\frac{\pi}{2p}}$.

2. Soit $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On sait qu'il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ tels que $S = P.D.P^{-1}$.

(a) S'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M^{2p} = D$ alors $M.D = M.M^{2p} = M^{2p+1} = D.M$.

(b) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$MD = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_1 & d\lambda_2 \end{pmatrix} = DM = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Donc $b = c = 0$, par suite M est une matrice diagonale.

(c) On suppose que $\lambda_1 < 0$ et qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $M^{2p} = D$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors d'après la question précédente,

$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donc $M^{2p} = \begin{pmatrix} a^{2p} & 0 \\ 0 & d^{2p} \end{pmatrix}$, d'où $\lambda_1 = a^{2p} < 0$. Absurde. On

conclut que $\lambda_1 = \lambda_2$

3. On a $\left(\alpha R_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -\alpha^2 I_2$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 < 0$ alors $D = \lambda_1 I_2 = -\lambda^2 I_2$, avec $\lambda = \sqrt{-\lambda_1}$.

$$D = \left(\lambda R_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \left(\left(\sqrt[p]{\lambda} R_{\frac{\pi}{2p}}\right)^p\right)^2 = \left(\sqrt[p]{\lambda} R_{\frac{\pi}{2p}}\right)^{2p}.$$

4. $A \in \text{Im}(g_{2p})$ si et seulement si ($\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset [0, +\infty[$ ou bien $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$).

Fin de l'épreuve