



Concours Physique Technologie Epreuve de Physique

Date : Jeudi 13 Juin 2019 Heure : 8 H Durée : 4 H Nombre de pages : 8

Barème : Problème 1: 12,5 pts , Problème 2: 7,5 pts

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants, le candidat peut les résoudre dans l'ordre qui lui convient, en respectant néanmoins la numérotation des questions.

Un candidat peut toujours se servir d'un résultat fourni par l'énoncé pour continuer sa composition.

Données

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z ; \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ en coordonnées cylindriques}$$

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad 1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} ; 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ SI} \quad i^2 = -1$$

Problème 1

Le modèle de l'oscillateur harmonique est l'un des modèles les plus rencontrés dans nombreux domaines de la physique. On l'adopte pour modéliser et analyser plusieurs systèmes vibratoires allant des systèmes industriels jusqu'aux systèmes moléculaires. Nous l'adoptons ici pour l'étude de la membrane d'un haut parleur électrodynamique.

I. Le système masse ressort

On se place dans le référentiel du laboratoire $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ supposé galiléen dans lequel on considère une masse M accrochée à un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 et pouvant se déplacer sur un plan horizontal le long de l'axe Ox (figure 1). Le déplacement de M , supposée ponctuelle, est limité aux petites oscillations autour de la position d'équilibre.

La masse du ressort est supposée négligeable comparée à M dont le poids est compensé par la réaction du plan. Hors équilibre, on repère la position de M par l'abscisse $x(t)$ comptée à partir de sa position d'équilibre.

La masse M est aussi soumise à :

- Une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x$ où α est une constante positive.
- Une force excitatrice $\vec{F}_e = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$ avec F_0 et ω sont deux constantes positives.

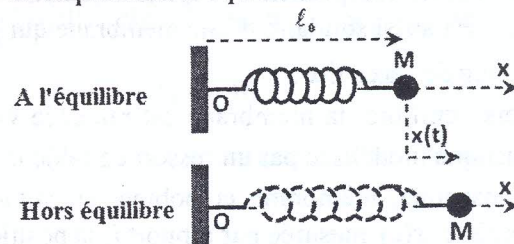


Figure 1

1. Etablir l'équation de mouvement de la masse M et la mettre sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 e(t). \text{ Donner les expressions de } \omega_0, Q \text{ et } e(t).$$

2. On se place dans un premier cas où $\vec{F}_e = \vec{0}$ et $\vec{F}_f = \vec{0}$. Exprimer la solution de cette équation sachant qu'on a $x(t=0) = x_0$ et $\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$. Exprimer les énergies cinétique $E_c(t)$ et potentielle $E_p(t)$ de cet oscillateur. Vérifier que son énergie mécanique E_m est conservée.

3. Dans la suite on considère le cas où $\vec{F}_e \neq \vec{0}$ et $\vec{F}_f \neq \vec{0}$. En régime établi, on exprimera la solution de l'équation de mouvement sous la forme :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{ où } \varphi \text{ est une phase à l'origine.}$$

On cherche une solution $\underline{x}(t)$ en notation complexe, trouver l'amplitude X_0 et montrer qu'elle passe par un maximum pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ à condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On suppose que cette condition est vérifiée dans la suite.

4. La résonance observée peut être reliée à sa bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ où ω_1 et ω_2 correspondent aux égalités $X_0(\omega_1) = X_0(\omega_2) = \frac{X_{0\max}}{\sqrt{2}}$ dans lesquelles $X_{0\max} = Q \frac{F_0}{k}$ désigne l'amplitude maximale obtenue pour $Q \gg 1$. Montrer alors que $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

5. Montrer que la moyenne dans le temps de la variation de l'énergie mécanique $\frac{dE_m}{dt}$ du système masse – ressort est nulle. Interpréter.

II. Application à l'étude d'un haut-parleur électrodynamique

L'étude sera conduite dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, et on se place dans le système de coordonnées cylindriques d'axe Ox et de base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$.

Un haut-parleur électrodynamique est essentiellement constitué d'une bobine indéformable qui entoure le pôle nord d'un aimant annulaire fixe d'axe Ox (**figure 2**). Le pôle sud de l'aimant entoure le bobinage de telle sorte que le champ magnétique de norme constante engendré par l'aimant soit partout orthogonal aux fils constituant la bobine ($\vec{B} = B\vec{u}_r$).

La bobine, comportant N spires circulaires de rayon a , alimentée par un courant d'intensité $i(t)$, est aussi solidaire d'une membrane qui peut effectuer des oscillations de faibles amplitudes le long de l'axe Ox .

Hors équilibre, la membrane est ramenée vers sa position d'équilibre par une force de rappel élastique modélisée par un ressort de raideur k solidaire à l'aimant (**figure 2**).

L'ensemble, membrane et bobine, constitue l'équipage mobile de masse M repéré par son abscisse $x(t)$ mesurée par rapport à sa position d'équilibre. Il est soumis aux forces suivantes :

- Son poids et la réaction du support opposée au poids.
- La force de rappel du ressort.
- La résultante des forces de Laplace exercées par l'aimant sur la bobine.

- Une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\alpha \frac{dx(t)}{dt} \vec{u}_x$ et dont la puissance est égale à la puissance sonore émise par le haut parleur.

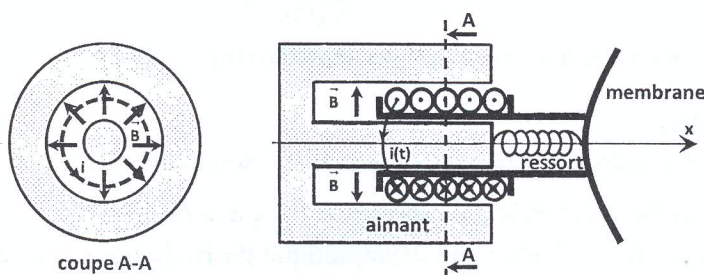


Figure 2

- Exprimer, dans la base cylindrique, la force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un élément de courant filiforme $i(t)d\vec{\ell}$ de la bobine. En déduire la résultante des forces de Laplace s'exerçant sur l'ensemble de la bobine. On posera $\ell = 2\pi Na$.
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation de mouvement de M liant $x(t)$ et ses dérivées à l'intensité $i(t)$. Cette équation est alors appelée équation mécanique.
- Justifier l'apparition d'une fem induite $E(t)$ aux bornes de la bobine au cours de son mouvement. On prendra dans la suite $E(t) = B\ell \frac{dx(t)}{dt}$.
- La bobine d'inductance propre L et de résistance électrique R est connectée à une source idéale de tension $u(t)$. Représenter le circuit électrique équivalent à cette bobine. Ecrire alors l'équation électrique du circuit.
- A partir des deux équations, mécanique et électrique, déduire une seule équation en terme de puissance et la mettre sous la forme :

$$u(t).i(t) = \frac{dW}{dt} + P_e + P_m$$

$P_e = R.i(t)^2$ est la puissance électrique dissipée par effet Joule, et $P_m = \alpha \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2$ est la puissance sonore émise par la membrane. Donner alors l'expression de W en précisant sa signification physique.

- Pour une évolution sinusoïdale des grandeurs électriques et mécaniques à la pulsation ω , exprimer la valeur moyenne $\langle u(t).i(t) \rangle$. Commenter alors la répartition de la puissance moyenne fournie par le générateur.
- Sachant que le rendement d'un haut-parleur mesure son aptitude à transformer la puissance électrique reçue en puissance sonore, proposer une définition du rendement η du haut-parleur en fonction de $\langle P_e \rangle$ et $\langle P_m \rangle$. Comment peut-on améliorer ce rendement ?

III. Analyse d'un signal sonore

Dans l'objectif d'analyser le spectre d'un signal sonore périodique, on utilise un microphone qui convertit ce signal en une tension électrique $v_e(t)$, puis un filtre qui sélectionne les composantes sinusoïdales de cette tension.

Soit $v_s(t)$ la tension de sortie du filtre, sa fonction de transfert complexe à la pulsation ω s'écrit :

$$\underline{H}(i\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + iQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

H_0 , ω_0 et Q sont des grandeurs positives caractéristiques du filtre.

13. Etude du filtre

13.1 Exprimer le gain réel $G(\omega) = |\underline{H}(i\omega)|$ et tracer son allure en fonction de ω .

13.2 Déduire la pulsation et le gain réel de ce filtre à la résonance.

13.3 Tracer l'allure du diagramme asymptotique de Bode (gain en décibel). Préciser les asymptotes. Quelle est la nature de ce filtre ?

13.4 Déterminer la bande passante $\Delta\omega$ correspondante à $G(\omega) = H_0 / \sqrt{2}$.

14. Spectre d'un signal carré

On désire déterminer H_0 et ω_0 en réalisant une expérience dans laquelle le filtre est soumis à un signal d'entrée $v_e(t)$ de forme carrée, d'amplitude V_0 , de période T et de fréquence $f = \frac{1}{T}$ (figure 3).

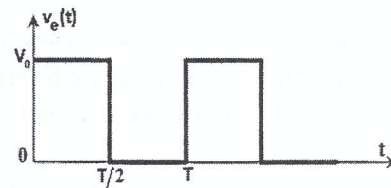


Figure 3

La décomposition en série de Fourier de $v_e(t)$ s'écrit :

$$v_e(t) = \frac{V_0}{2} + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)2\pi ft]$$

14.1 Décrire le spectre de ce signal. Exprimer les fréquences des quatre premières composantes non nulles de ce signal. Tracer alors le spectre de $v_e(t)$ pour ces fréquences.

14.2 Les tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ sont indiquées sur l'écran d'un oscilloscope (figure 4). On constate que lorsqu'on fait varier la fréquence f de $v_e(t)$, l'amplitude de $v_s(t)$ diminue.

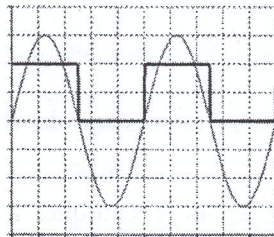


Figure 4

- Les deux voies de l'oscilloscope sont en mode DC
- Base de temps : **100 μ s** par carreau
- Sensibilités des voies:
Tension $v_e(t)$ (en gras) : **1V** par carreau
Tension $v_s(t)$: **2V** par carreau

a- Déterminer graphiquement V_0 et f .

b- Tracer le spectre de $v_s(t)$. Expliquer sa forme sinusoïdale.

c- Déduire, à partir de la figure 4, la pulsation ω_0 et la valeur de H_0 .

15. Comportement intégrateur

On se place dans le domaine des hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$). Donner l'expression approchée de $\underline{H}(i\omega)$ et justifier le comportement intégrateur du filtre. Quelle serait alors la forme du signal de sortie $v_s(t)$?

Problème 2

La première partie de ce problème étudie la superposition des deux ondes pour aboutir à des ondes stationnaires qui peuvent s'établir dans plusieurs systèmes optiques, entre autres, dans les cavités lasers. Les fonctions d'onde des particules dans un puits quantique et la notion de paquets d'onde seront aussi abordées. Ce problème sera achevé par l'étude d'une méthode de refroidissement d'un laser.

I- Superposition d'ondes électromagnétiques

On considère dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω (notée S) se propageant dans le vide dans le sens des z croissants. En notation complexe, son champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\beta y) e^{i(\omega t - kz)} [\vec{u}_x + i\alpha \vec{u}_y]$$

E_0 , α , β et k sont des constantes réelles positives.

1. On pose $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

- 1.1 Ecrire les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants. En déduire l'équation de propagation de $\vec{E}$.
- 1.2 En déduire une relation entre k , β , ω et c la vitesse de la lumière dans le vide.
- 1.3 Montrer que cette onde résulte de la superposition des deux ondes planes O_1 et O_2 se propageant dans le plan yOz symétriquement par rapport à l'axe Oz , préciser leur vecteur d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ et donner les expressions de leur champ électrique $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.
- 1.4 Calculer leur champ magnétique $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$.

2. On pose $\beta = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

- 2.1 Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par l'extrémité de $\vec{E}$ dans un plan d'onde et étudier en fonction de α l'état de polarisation de cette onde.
- 2.2 Calculer $\vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Big|_{t=0}$ et discuter en fonction de α le sens de rotation de $\vec{E}$.
- 2.3 On superpose à l'onde S une onde S' de même pulsation, de même direction de propagation, de même polarisation que l'onde S , d'amplitude $-E_0$ mais se propageant en sens inverse.
 - a- Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}'$ de l'onde S' .
 - b- Déterminer l'expression du champ $\vec{E}_{rés}$ de l'onde résultante. Quelle est sa nature ?

3. Dans la suite du problème, on prendra $\alpha = \beta = 0$.

- 3.1 Donner la nouvelle expression du champ électrique de l'onde résultante due à la superposition des ondes S et S' .
- 3.2 Justifier que cette onde peut correspondre à la superposition des deux ondes S_1 et S_2 planes se propageant dans le vide en sens inverse suivant la direction Oz . L'onde S_2 correspond à celle réfléchie dans le vide sous incidence normale par un miroir M conducteur parfait placé en $z = 0$. Préciser alors les expressions des champs électriques de S_1 et S_2 .

3.3 On place un deuxième miroir M' conducteur parfait en face de M à l'abscisse $z = -d$ (figure 5).

- a- Appliquer la condition aux limites en $z = -d$, et exprimer les fréquences des ondes qui s'établissent dans la cavité formée par M et M' sous la forme :

$$\nu_m = m \frac{c}{2d} \text{ où } m \text{ est un entier naturel. Ces ondes sont}$$

appelées modes de résonance.

- b- Décrire le comportement de l'onde dans cette cavité.
c- En déduire la différence de fréquences $\Delta\nu$ entre deux modes de résonance successifs de cette cavité. Calculer ν_1 , ν_2 et $\Delta\nu$ pour $d = 30 \text{ cm}$.

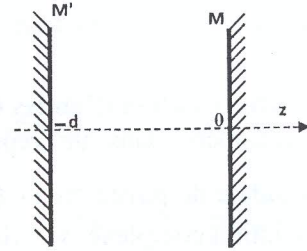


Figure 5

II- Interaction matière - rayonnement

4. Dans l'étude de l'interaction de la lumière avec la matière, le modèle de l'électron élastiquement lié soumis à une excitation électrique sinusoïdale de faible intensité permet de dégager l'essentiel des propriétés optiques des matériaux. Ce modèle cesse d'être valable lorsque l'excitation est produite par un laser de forte puissance de champ électrique comparable au champ de cohésion intra-atomique. Dans cette partie le laser sera décrit par le modèle d'onde plane dans le vide.

4.1 Calculer le module du champ électrique associé à la force de Coulomb entre un électron et un proton d'un noyau atomique distants de $a_0 = 0,529 \text{ \AA}$.

4.2 Calculer pour un laser He-Ne de puissance $P = 10 \text{ mW}$ et de diamètre $D = 1 \text{ mm}$, l'amplitude du champ électrique E_0 de l'onde associée à ce laser.

4.3 Soit un laser impulsif de durée d'impulsion $\tau = 10 \text{ ns}$ et d'énergie par impulsion $W = 100 \text{ mJ}$ focalisé sur une surface de diamètre $D = 1 \text{ }\mu\text{m}$. Calculer la puissance de ce laser et déduire l'amplitude E_0 associée.

4.4 L'effet non linéaire dans un milieu apparaît lorsque le champ d'excitation devient du même ordre de grandeur que le champ intra-atomique. Quel est parmi ces deux lasers celui qui permet d'aboutir à un effet non linéaire ? Justifier.

III Particule Quantique

5. L'amplification de la lumière laser est basée sur l'émission stimulée et le phénomène d'inversion de population, lesquels sont basés sur la quantification des niveaux d'énergie des atomes et des molécules, et aussi sur la quantification du rayonnement.

5.1. Expliquer la dualité onde - corpuscule de la lumière. Citer deux expériences permettant de mettre en évidence ces deux aspects

5.2. Le mouvement d'une particule quantique libre non relativiste de masse m est décrit par une fonction d'onde complexe $\Psi(x, t)$ qui vérifie l'équation de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

- a- Que représente la grandeur $|\Psi(x,t)|^2$? Quelle est la dimension de $|\Psi(x,t)|$?
- b- Donner la relation de De Broglie reliant la quantité de mouvement p et la longueur d'onde λ associée à une particule libre de masse m , et déduire la relation entre l'énergie E et le nombre d'onde k associés à cette particule. Donner la relation de dispersion de la particule libre. Commenter.

5.3. Les lasers à puits quantiques sont des lasers à semi-conducteur se basant sur le confinement (piégeage) des électrons dans des puits quantiques représentés par une zone de l'espace dans laquelle le potentiel ressenti par une particule atteint un minimum. On considère ici une particule piégée dans un puits de potentiel de largeur L (figure 6) défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ +\infty & x < 0 \text{ et } x > L \end{cases}$$

La fonction d'onde associée à cette particule d'énergie E peut s'écrire sous la forme: $\Psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

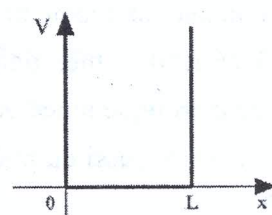


Figure 6

- a- Pourquoi un tel état est appelé état stationnaire ?
- b- Donner les conditions aux limites vérifiées par la fonction $\varphi(x)$ en $x=0$ et $x=L$.
- c- Montrer que pour $x \in [0, L]$, la solution de l'équation de Schrödinger s'écrit sous la forme : $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)$.
- d- Donner alors l'expression de l'énergie E_n en faisant apparaître un nombre entier n . Quelle est l'origine de cette quantification ?
6. En réalité l'état quantique de la particule libre est décrit par la superposition d'un grand nombre de fonctions d'onde appelée « paquet d'ondes ». Pour des nombres d'onde compris entre k_1 et k_2 la fonction d'onde associée à ce paquet peut être définie par :

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_0 e^{-i[\omega(k)t - kx]} dk \quad \text{avec} \quad g_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} & \text{pour } k_1 < k < k_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

6.1 On pose $k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2}$ et $k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2}$, déterminer $\Psi(x,0)$.

6.2 En déduire la densité de probabilité $\rho(x) = |\Psi(x,0)|^2$. Déterminer les valeurs qui annulent $\rho(x)$ et tracer ensuite la courbe $\frac{\rho(x)}{\rho_0}$ où $\rho_0 = \rho(x=0)$.

6.3 Montrer que $\Psi(x,0)$ représente bien l'état d'une particule libre à l'instant $t=0$. On donne : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \frac{\pi}{2}$.

6.4 Trouver les positions x_+ et x_- des premières valeurs de x qui annulent $\rho(x)$ de part et d'autre de l'origine des abscisses. Exprimer $\Delta x = x_+ - x_-$. Calculer le produit $\Delta x \cdot \Delta k$. En déduire l'expression de $\Delta x \cdot \Delta p$. Quel nom donne-t-on à cette relation ? Commenter.

IV Transfert thermique

On considère un corps homogène, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ . En présence d'une source interne de chaleur q en $W m^{-3}$, la température T au sein de ce corps est régie par l'équation de la chaleur :

$$\lambda \Delta T + q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

7. Rappeler la loi de Fourier et donner l'unité de λ . Dans la suite, on se placera en régime stationnaire. Récrire alors l'équation précédente en absence de source interne.
8. Dans cette question on étudie le transfert thermique par conduction le long d'un cylindre d'axe Oz , de rayon a , de longueur L et de conductivité thermique λ dont les extrémités sont maintenues aux températures $T(z=0)=T_1$ et $T(z=L)=T_2$ avec $T_2 < T_1$.
Déterminer le flux thermique Φ_{th} à travers une section S du cylindre et en déduire sa résistance thermique notée R_{th} .
9. On tient compte aussi du phénomène de convection à travers les deux surfaces de base de ce cylindre.
Soit h le coefficient de transfert convectif, exprimer le flux convectif Φ_{cv} transféré entre un corps solide de température T_p et un fluide de température T_f à travers une surface d'échange S_e . En déduire la résistance thermique R_{cv} correspondante.
10. Exprimer alors la résistance thermique totale du cylindre en négligeant la convection à travers sa surface latérale, et en supposant que les deux surfaces de base ont le même coefficient h .
11. Au cours de leur fonctionnement, les lasers de puissance génèrent une quantité de chaleur importante assimilée à une source interne de chaleur q supposée constante. Cette chaleur doit être évacuée pour éviter la surchauffe et la détérioration de certains composants de ce laser. Le milieu amplificateur du laser considéré est un cristal sous forme d'un barreau cylindrique de longueur L , de rayon r_0 et de conductivité thermique λ refroidi par un système à effet Peltier qui permet de fixer une température en surface $T(r=r_0)=T_0$.

Dans la suite, le transfert thermique est supposé radial, et on se place en régime stationnaire.

11.1 Ecrire la nouvelle équation de la chaleur.

11.2 Montrer que sa solution peut s'écrire sous la forme : $T(r) = T_0 + \delta T \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$

δT est une constante à exprimer en fonction de r_0 , q et λ .

11.3 Tracer le profil de température $T(r)$ de part et d'autre de l'axe Oz du barreau.

11.4 Exprimer $T(r=0) - T_0$.

11.5 La présence d'ions dopants à l'intérieur du cristal laser peut modifier sa conductivité thermique. Comment choisir λ pour un meilleur refroidissement du laser ?

11.6 Exprimer le flux thermique à travers la surface latérale du cylindre. Calculer sa valeur.

On donne $r_0=3,5$ mm, $L=11,5$ cm et $q=0,12$ W/cm³.

fin de l'épreuve