



Concours Technologie Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Exercice

1. (a) Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positives, alors pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq p_n e^{-tx_n} \leq p_n$.
Or, $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge, on en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} p_n e^{-tx_n}$.

- (b) Soit $t \geq 0$. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} P(X = x_n) e^{-tx_n}$ converge, ce qui est le cas d'après

$$1.(a) \text{ donc } e^{-tX} \text{ est d'espérance finie et } E(e^{-tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) e^{-tx_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-tx_n}.$$

2. D'après 1.(a) $\forall t \geq 0$, on a $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{-tx_n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, donc Φ_X est à valeurs dans $[0, 1]$.

D'autre part, en posant $f_n(t) = p_n e^{-tx_n}$, pour $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$;
- $\forall t \geq 0$, $|f_n(t)| \leq p_n$, donc $\sup_{t \in [0, +\infty[} |f_n(t)| \leq p_n$ et $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} f_n$

converge normalement et par suite uniformément sur $[0, +\infty[$;

On conclut, par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, que Φ_X est continue sur $[0, +\infty[$.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $\varphi : x \mapsto x^k e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, donc φ est positive.
 $\varphi'(x) = x^{k-1} e^{-\lambda x} (k - \lambda x)$, d'après son tableau de variations, φ atteint son maximum en $\frac{k}{\lambda}$, donc pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq x^k e^{-\lambda x} \leq \varphi\left(\frac{k}{\lambda}\right) = \frac{k^k}{\lambda^k} e^{-k}$.

- (b) Avec les notations du 2. on a :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_n^{(k)}(t) = (-1)^k p_n x_n^k e^{-tx_n}$;
- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$;
- **Convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$, pour $k \in \mathbb{N}^*$:**

D'après 3.(a) $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $|f_n^{(k)}(t)| = p_n x_n^k e^{-tx_n} \leq p_n \frac{k^k}{t^k} e^{-k} \leq p_n \frac{k^k}{\alpha^k} e^{-k}$, donc

$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f_n^{(k)}(t)| \leq M_k p_n$, où $M_k = \frac{k^k}{\alpha^k} e^{-k}$. Or, $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge normalement et par suite uniformément sur $[\alpha, \beta]$;

On déduit alors que la somme $\Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t > 0$, $\Phi_X^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n^k e^{-tx_n} = (-1)^k E(X^k e^{-tX})$.

4. La variable aléatoire discrète $aX + b$ est bien à valeurs réelles positives, et on a :

$$\forall t \geq 0, \Phi_{aX+b}(t) = E(e^{-t(aX+b)}) = E(e^{-atX} e^{-bt}) . \text{ Par linéarité de l'espérance, } \\ \Phi_{aX+b}(t) = e^{-bt} E(e^{-atX}) = e^{-bt} \Phi_X(at).$$

5. $\forall t \geq 0$, e^{-tX} et e^{-tY} sont des variables aléatoires discrètes indépendantes (car X et Y sont indépendantes) et d'espérances finies, on en déduit $E(e^{-t(X+Y)}) = E(e^{-tX} e^{-tY}) = E(e^{-tX}) E(e^{-tY})$, d'où $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t)$, donc $\Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$.
-

6. X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, avec $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de transfert, e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} P(X = n) e^{-nt}$ converge.

Or, $P(X = n) e^{-nt} = p e^{-t} ((1-p) e^{-t})^{n-1}$, donc e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si $|(1-p) e^{-t}| < 1 \Leftrightarrow t \in]\ln(1-p), +\infty[$ et pour tout $t > \ln(1-p)$,

$$E(e^{-tX}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) e^{-nt} = p e^{-t} \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p) e^{-t})^{n-1} = \frac{p e^{-t}}{1 - (1-p) e^{-t}}.$$

7. (a) X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$. D'après le théorème de transfert, e^{-tX} est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} P(X = n) e^{-nt}$ converge. Or,

$$P(X = n) e^{-nt} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^{-t})^n}{n!}, \text{ et la série } \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda e^{-t})^n}{n!} \text{ converge pour tout réel } t, \text{ donc } e^{-tX} \\ \text{est d'espérance pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ avec } E(e^{-tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) e^{-nt}$$

- (b) - La somme de deux variables indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres λ et μ , suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Donc, puisque les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, leur somme S_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

- Les inégalités sont immédiates pour $t = 0$.

Soit $t > 0$, on a $(S_n \leq na) = (-tS_n \geq -tna) = (e^{-tS_n} \geq e^{-tna})$. Or, e^{-tS_n} est d'espérance finie, car S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$, donc par l'inégalité de Markov,

$$P(S_n \leq na) = P(e^{-tS_n} \geq e^{-tna}) \leq \frac{E(e^{-tS_n})}{e^{-tna}}, \text{ et d'après 7.(a)}$$

$$E(e^{-tS_n}) = \Phi_{S_n}(t) = e^{n\lambda(e^{-t}-1)}, \text{ d'où } P(S_n \leq na) \leq e^{n\lambda(e^{-t}-1)} e^{tna} = e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}.$$

$$\text{De même pour } t < 0, P(S_n \geq na) = P(e^{-tS_n} \geq e^{-tna}) \leq e^{n(\lambda(e^{-t}-1)+at)}.$$

Problème 1

I Généralités

1. - La fonction nulle $0 \in \mathbb{E}$, car $t \mapsto \frac{0}{1+t^2} = 0$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$;
 - Si f et g sont dans $\mathbb{E}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est continue sur $[0, +\infty[$, et l'application $t \mapsto \frac{\lambda f(t) + g(t)}{1+t^2} = \lambda \frac{f(t)}{1+t^2} + \frac{g(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, comme somme de fonctions intégrables.

Ainsi, $\mathbb{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$, c'est donc un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel..

D'autre part, si $f \in \mathbb{B}$, alors f est continue sur $[0, +\infty[$, et il existe $M > 0$ tel que $\forall t \geq 0$, $|f(t)| \leq M$, donc $\left| \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{M}{1+t^2}$: intégrable sur $\mathbb{R}_+$, par suite $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $f \in \mathbb{E}$.

2. (a) Il suffit de considérer $t_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi > 0$, $g(t_n) = \sqrt{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc g n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

$$(b) \forall t \geq 0, \left| \frac{g(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} = h(t),$$

h est continue sur $\mathbb{R}_+$, et $h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$: intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\frac{3}{2} > 1$.

On en déduit que $h \in L^1(\mathbb{R}_+)$, donc $g \in \mathbb{E}$.

On conclut alors que $\mathbb{B}$ est strictement inclus dans $\mathbb{E}$.

3. Soit $x > -1$, on a $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$, de plus $\frac{f(t)}{1+t^2+x} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(t)}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

4. Simple par linéarité de l'intégrale.

II Propriétés de $\tilde{f}$

1. On pose $F(x, t) = \frac{f(t)}{1+t^2+x}$, pour $(x, t) \in]-1, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, de sorte que $\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} F(x, t) dt$.

On a :

- $\forall x > -1$, $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

- $\forall t \geq 0$, $x \mapsto F(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x, t) = (-1)^p p! \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}} \text{ par une récurrence simple ;}$$

- $\forall x > -1$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

- Hypothèse de domination locale : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $[a, b] \subset]-1, +\infty[$, on a

$$\forall x \in [a, b], \forall t \geq 0, \left| \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \frac{p! |f(t)|}{(1+t^2+a)^{p+1}} = \varphi_p(t);$$

φ_p est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\varphi_p(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{|f(t)|}{1+t^2+a}\right)$, donc φ_p est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'où $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x > -1$,

$$(\tilde{f})^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x, t) dt = (-1)^p p! \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(1+t^2+x)^{p+1}} dt.$$

2. (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, x_n \geq 1$, donc $\tilde{f}(x_n)$ est bien définie

pour $n \geq n_0$. On pose alors $h_n(t) = \frac{f(t)}{1+t^2+x_n}, \forall t \geq 0$ et on applique le théorème de convergence dominée :

- $\forall n \geq n_0, h_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

- $(h_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

- $\forall n \geq n_0, \forall t \geq 0, |h_n(t)| \leq \frac{|f(t)|}{1+t^2} = \varphi(t)$, et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$;

Donc, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt = 0.$$

(b) caractérisation séquentielle de la limite.

3. L'application ψ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $\forall t \geq 0, \left| \frac{\psi(t)}{1+t^2} \right| \leq |\psi(t)|$ et ψ est intégrable

sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $t \mapsto \frac{\psi(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et par suite $\psi \in \mathbb{E}$.

$$\text{D'autre part, } x \tilde{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1+t^2)\psi(t) - (1+t^2)\psi(t)}{1+t^2+x} dt = \int_0^{+\infty} \psi(t) dt - \tilde{g}(x) \quad (*)$$

où $g : t \mapsto (1+t^2)\psi(t)$. Or, $g \in \mathbb{E}$, car g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après 2.(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{g}(x) = 0$, ce qui entraîne par (*) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tilde{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t) dt$,

par suite $\tilde{\psi}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi(t) dt$.

4. (a) Si $x \in]-1, 1[$, alors $\frac{|x|}{1+t^2} \leq |x| < 1$, donc $\frac{f(t)}{1+t^2+x} = \frac{f(t)}{1+t^2} \frac{1}{1+\frac{x}{1+t^2}} = \frac{f(t)}{1+t^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^p}{(1+t^2)^p}$.

(b) Soit $x \in]-1, 1[$.

$$\text{D'après ce qui précède : } \tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p f(t) x^p}{(1+t^2)^{p+1}} dt$$

On pose $u_p(t) = \frac{(-1)^p f(t) x^p}{(1+t^2)^{p+1}}$, et on applique le théorème d'intégration terme à terme :

- $\forall p \in \mathbb{N}, u_p$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, car $(1+t^2)^{p+1} \geq 1+t^2 > 0$ pour tout $t \geq 0$ donc

$$|u_p(t)| \leq \frac{|f(t)|}{(1+t^2)} : \text{intégrable sur } [0, +\infty[;$$

- $\sum_{p \geq 0} u_p$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et sa somme est $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2+x}$: continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;

- pour tous $t \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |u_p(t)| dt \leq |x|^p \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)^{p+1}} dt \leq |x|^p \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(1+t^2)} dt}_{=c} = c|x|^p$ et $\sum_{p \geq 0} |x|^p$ converge pour $x \in]-1, 1[$. Par suite, $\sum_{p \geq 0} \int_0^{+\infty} |u_p(t)| dt$ converge ;

ce qui permet de conclure que $\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_p(t) dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_p(t) dt = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p I_p x^p$

- (c) Non, car il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, qui ne sont pas développables en série entière sur $] -1, 1[$, par exemple $t \mapsto \frac{1}{1+4t^2}$ est développable en série entière seulement sur $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
OU car il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, qui ne sont pas développables en série entière par exemple $t \mapsto \exp(-\frac{1}{t^2})$, si $t \neq 0$.

Problème 2

I Existence de matrice de G de norme minimale

1. La composante située à la i -ème ligne et i -ème colonne de ${}^t A A$ est $c_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

Ainsi, en échangeant la notation des indices

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2.$$

2. (a) L'application $\det$ est polynomiale en les composantes de la matrice donc elle est continue.
- (b) D'après (a) l'application $\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $G = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$, donc G est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\det(A_p) = 1$ d'où $A_p \in G$. De plus $\|A_p\| = \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2} + n - 2}$.
- (b) On a $\|A_p\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$ donc G n'est pas borné.
4. (a) Comme $M \in G$ donc $\det(M) = 1$ et par suite $M \neq 0_n$. Ainsi $r = \|M\| \neq 0$.
- (b) L'application $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne donc continue, ou bien c'est une composée de fonctions continues d'après question 1.

(c) Comme $K \subset B_f(0_n, r)$ qui est bornée alors K est borné.

D'autre part, K étant une intersection de deux fermés donc c'est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En effet, si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de K qui converge vers L , alors :

- $X_n \in G$ et G est fermé donc $L \in G$

- $X_n \in B_f(0_n, r)$ et $B_f(0_n, r)$ est fermée donc $L \in B_f(0_n, r)$

Ainsi, $L \in K$, par suite K est un fermé.

Finalement, K est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Pour tout $A \in G \setminus K$ on a $\|A\| > r$ et si $A \in K$ on a $\|A\| \leq r$. Ainsi $\inf_{A \in G} \|A\| = \inf_{A \in K} \|A\|$.

Comme l'application $A \mapsto \|A\|$ est continue sur le fermé borné K alors elle atteint sa borne inférieure dans K .

II Cas particulier où $n = 2$

1. Le résultat s'obtient en calculant $\chi_A(X) = \det(XI_2 - A)$.

2. $\|A\| = \sqrt{2}$.

3. (a) Comme $\text{Tr}({}^tAA) = \|A\|^2 = r^2$ et $\det({}^tAA) = \det(A)^2 = 1$, alors d'après 1.

$$\chi_{{}^tAA}(X) = X^2 - r^2X + 1.$$

(b) La matrice tAA est symétrique réelle donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral. Ainsi $\chi_{{}^tAA}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc son discriminant $\Delta = r^4 - 4 \geq 0$.

4. D'après 2. une matrice $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est une matrice dans G et de norme $\sqrt{2}$ donc $A \in K_{\sqrt{2}}$ et par suite $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \subset K_{\sqrt{2}}$.

Réciproquement, si $A \in K_{\sqrt{2}}$ alors d'après 3. $\chi_{{}^tAA}(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$. D'où $\text{Sp}({}^tAA) = \{1\}$ et comme tAA est diagonalisable alors ${}^tAA = I_2$. Ainsi $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

III Cas général

1. (a) Théorème spectral.

(b) On a $\|AV_i\|^2 = \langle AV_i, AV_i \rangle = {}^tV_i {}^tAAV_i = \lambda_i \|V_i\|^2 = \lambda_i > 0$ car A est inversible et donc $AV_i \neq 0$.

2. (a) ${}^tAU_i = \frac{1}{\sigma_i} {}^tAAV_i = \sigma_i V_i$.

(b) On a $A {}^tAU_i = \sigma_i^2 U_i = \lambda_i U_i$.

(c) On a $\langle U_i, U_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} {}^tV_i {}^tAAV_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} {}^tV_i V_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \delta_{i,j} = \delta_{i,j}$. Comme de plus la famille est de cardinal n alors c'est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. (a) Les colonnes de U (respectivement de V) forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ces deux matrices sont orthogonales.
-

- (b) Par un calcul matriciel, la composante située sur la i -ème ligne et j -ème colonne de Σ est $\Sigma_{i,j} = {}^tU_i A V_j = \sigma_j {}^tU_i U_j = \sigma_j \delta_{i,j}$.
-

- (c) On a $\|A\|^2 = \|U\Sigma^tV\|^2 = \text{Tr}(V\Sigma^2{}^tV) = \text{Tr}(\Sigma^2) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$. De plus

$$\det(A) = \det(U\Sigma^tV) = \det(\Sigma) = \prod_{i=1}^n \sigma_i \text{ (sachant que } \det(A) = 1 > 0\text{)}.$$

- (d) Une matrice $A = U\Sigma^tV \in G$ de norme minimale est une matrice telle que $\det(A) = \sigma_1 \cdots \sigma_n = 1$ et $\|A\|^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$ soit minimale. D'après le résultat admis on a dans ce cas $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = 1$ d'où $A = U^tV$ est une matrice orthogonale : ${}^tAA = I_n$ et par suite $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, et la valeur minimale de $\|A\| = \sqrt{n}$.
Réciproquement, si $A \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(A) = 1$ donc $A \in G$ et $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}({}^tAA)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$.
-