



Concours Physique et Chimie & Technologie
Epreuve de Mathématiques

Date : Mercredi 01 Juin 2022	Heure : 8H	Durée : 4H	Nbre pages : 5
------------------------------	------------	------------	----------------

Le sujet comporte deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé.

Rappel et notations :

- $0! = 1, \forall n \geq 1, n! = n(n-1) \cdots 2.1$ et $C_n^{n-k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, où $k \leq n$.
- Les fonctions exp, cos et sin sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} ; \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Problème 1

Partie I

On considère la fonction Γ définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Montrer que Γ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $\Gamma(x) \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t} dt, \forall x \geq 1$ et déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(b) En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*$
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$.
(b) Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.
(c) Montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ quand $n \rightarrow +\infty$
(d) Sachant que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ puis $\Gamma(\frac{1}{2})$.
(e) En déduire que $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II

Soit $\alpha > 0$. On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante, dite de Bessel :

$$(E_\alpha) : x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

On pose $y_r(x) = x^r a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r}$ où $a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$.

1. On suppose que $\alpha \neq \frac{1}{2}$

(a) Montrer que si y_r est une solution de (E_α) alors

$$\begin{cases} r = \alpha \text{ ou } r = -\alpha \\ a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2, (n^2 + 2nr) a_n = -a_{n-2}. \end{cases}$$

(b) On considère $r = \alpha > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum a_n x^n \text{ est } +\infty \text{ et que } y_\alpha(x) = a_0 x^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (\alpha+1) \cdots (\alpha+n)} x^{2n}, \forall x \in]0, +\infty[.$$

(c) Refaire la même chose pour $r = -\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$

(d) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha} y_\alpha(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha y_{-\alpha}(x)$ et en déduire que les fonctions y_α et $y_{-\alpha}$ sont linéairement indépendantes.

(e) Trouver alors l'ensemble des solutions de l'équation (E_α) lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus (\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\})$.

2. On considère $\alpha = \frac{1}{2}$. Posons $u(x) = \sqrt{x} y(x)$ où y est une solution de $(E_{\frac{1}{2}})$.

(a) Vérifier que u est solution de l'équation différentielle $(F) : z'' + z = 0$ sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[: y(x) = A \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + B \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$, où A et $B \in \mathbb{R}$.

3. Pour $x > 0$ et $\alpha > -1$, on pose

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

(a) On suppose que $\alpha > 0$ et $\alpha \neq \frac{1}{2}$. En utilisant I-3-(a), montrer que $y_\alpha = J_\alpha$ sur

$$]0, +\infty[\text{ pour } a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}.$$

(b) Exprimer sur $]0, +\infty[$, $J_{\frac{1}{2}}$ et $J_{-\frac{1}{2}}$ à l'aide des fonctions usuelles.

4. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(x)$.

Partie III

Dans cette partie, on considère $\alpha = p \in \mathbb{N}$ et on cherche les solutions de (E_p) .

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - pt) dt$.

(a) Montrer que F_p est bien définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $F_p(0)$.

(b) Montrer que F_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donner les expressions de F_p' et F_p''

(c) Montrer que

$$x F_p'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x^2 \cos^2 t - px \cos t] \cos(x \sin t - pt) dt.$$

(d) Montrer alors que F_p est une solution de (E_p) sur $\mathbb{R}$.

2. On note $I_{2k} = \int_0^\pi (\sin t)^{2k} dt$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $F_0(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} I_{2k} x^{2k}$.

(b) Vérifier que $\forall k \geq 1$, $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2}$.

(c) En déduire que $F_0 = J_0$ sur $]0, +\infty[$.

3. On se propose de chercher une deuxième solution de (E_0) autre que J_0 . On pose $y = gJ_0$ et $u = g'$.

(a) Calculer $J_0(0)$ et montrer qu'il existe $\beta > 0$ telle que $J_0(x) > 0$, $\forall x \in]0, \beta[$.

(b) Vérifier que si y est une solution de (E_0) sur $]0, \beta[$ alors u est solution sur $]0, \beta[$ de l'équation de premier ordre suivante

$$(E') : xJ_0(x)u'(x) + (2xJ_0'(x) + J_0(x))u(x) = 0.$$

(c) Résoudre l'équation (E') sur $]0, \beta[$.

4. Posons $u_0(x) = \frac{1}{x(J_0(x))^2}$.

(a) Montrer que u_0 admet une primitive g_0 sur $]0, \beta[$.

(b) Montrer que le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1 de la fonction $u_0(x) - \frac{1}{x}$ est donné par : $u_0(x) - \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + o(x)$.

(c) En déduire que $g_0(x) = \ln(x) + c + O(x^2)$ au voisinage de 0, avec $c \in \mathbb{R}$.

(d) Prouver que g_0J_0 et J_0 forment une base de solutions de (E_0) sur $]0, \beta[$.

Problème 2 : Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I :

Soit E un ensemble fini non vide et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des parties non vides de E , on dit que $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une partition de E , si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux disjointes (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$) et $E = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Par exemple $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$ et $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ sont des partitions de $E = \{1, 2, \dots, 6\} = [1, 6]$.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $B_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, B_n désigne le nombre de partitions de l'ensemble $[1, n]$. Par exemple l'ensemble $\{1\}$ possède une seule partition qui est $\{\{1\}\}$ et donc $B_1 = 1$. Aussi les partitions possibles de l'ensemble $\{1, 2\}$ sont $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$ et donc $B_2 = 2$.

1. Vérifier que $B_3 = 5$.

2. Remarquons que dans toute partition de $[1, n+1]$, l'élément $n+1$ est accompagné de k éléments ($0 \leq k \leq n$) choisis dans $[1, n]$ et donc cette partition est de la forme :

$$\mathcal{P}_k = \left\{ \{n+1, \underbrace{n_1, n_2, \dots, n_k}_{k \text{ éléments}}\}, \text{Partition le l'ensemble des } n-k \text{ éléments restants} \right\}$$

- (a) Montrer alors que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$ puis calculer B_4 et B_5 .
- (b) Montrer par récurrence que $B_n \leq n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. On note R le rayon de convergence de la série définissant f .
- (a) Vérifier que $R \geq 1$.
- (b) Vérifier que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n$, $\forall x \in]-1, 1[$.
- (c) En utilisant le **Produit de Cauchy**, déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x \cdot f(x)$ et déduire que $f'(x) = e^x \cdot f(x)$, $\forall x \in]-1, 1[$.
- (d) Déduire que $f(x) = e^{e^x - 1}$, $\forall x \in]-1, 1[$.
4. (a) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$, $\forall x \in]-1, 1[$ puis montrer que :

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p e^{nx}}{n!}, \quad \forall x \in]-1, 1[, \forall p \in \mathbb{N}$$

- (b) En déduire que :

$$B_p = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}, \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (\text{Formule de Dobinski})$$

5. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$P(X = n) = \frac{1}{5e} \cdot \frac{n^3}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- (a) Justifier l'existence de la variable aléatoire X .
- (b) Montrer que $E(X) = 3$ et $V(X) = \frac{7}{5}$.
- (c) Montrer que le rayon de convergence de G_X la série génératrice de X est $+\infty$ puis vérifier que $G_X(t) = \frac{1}{5}(t^3 + 3t^2 + t)e^{t-1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Partie II :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On appelle **matrice de Pascal triangulaire inférieure** d'ordre n la matrice

$$L_n = (L_n(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ définie par } L_n(i, j) = \begin{cases} C_{i-1}^{j-1} & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}.$$

On appelle **matrice de Pascal triangulaire supérieure** d'ordre n , la matrice $U_n = {}^t L_n$, c'est-à-dire $U_n(i, j) = \begin{cases} C_{j-1}^{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$. Par exemple pour $n = 4$, on a :

$$L_4 = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 \\ C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Justifier que L_n et U_n sont inversibles.
 (b) Quelles sont les valeurs propres de L_n , cette matrice est-elle diagonalisable ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = L_n \cdot U_n$.
 (a) Vérifier que S_n est symétrique et calculer $\det(S_n)$. La matrice S_n est appelée **matrice de Pascal symétrique**.
 (b) Soient $n, m, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq \min(n, m)$, développer de deux manières le polynôme $(X+1)^n (X+1)^m$ et déduire que :

$$\sum_{k=0}^p C_n^k C_m^{p-k} = C_{n+m}^p \quad (\text{Formule de Vandermonde})$$

- (c) En déduire que $S_n(i, j) = C_{i+j-2}^{i-1}$ pour tous $i, j \in [1, n]$ puis calculer S_3 et S_4 .
 (d) Vérifier que $C_n^{k-1} = C_{n+1}^k - C_n^k$ pour tous $1 \leq k \leq n$ puis déduire que

$$\sum_{j=1}^n S_n(n, j) = C_{2n-1}^n = \frac{1}{2} C_{2n}^n, \quad \forall n \geq 1$$

3. (a) Montrer que les valeurs propres de S_n sont réelles et non nulles.
 (b) On considère le produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par : $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$. Soit $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire.
 Vérifier que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXS_nX = \|U_nX\|^2$.
 (c) Déduire que les valeurs propres de S_n sont strictement positives.
4. Soient λ une valeur propre de S_n et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à λ et notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses composantes et notons $|x_m| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ avec $1 \leq m \leq n$.

$$(a) \text{ Montrer que } \lambda \leq \sum_{j=1}^n S_n(m, j).$$

$$(b) \text{ Vérifier que } S_n(i+1, j) \geq S_n(i, j) \text{ et déduire que } \lambda \leq \frac{1}{2} C_{2n}^n.$$

5. Notons $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de S_n (pas forcément distinctes).
 (a) Montrer que $\|S_nX\| \leq \lambda_n \|X\|$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 (b) En déduire que, pour $n \geq 2$, $\lambda_n > C_{2n-2}^{n-1}$.
6. Soient $\lambda_{S_n}^{max}$ la plus grande valeur propre de S_n et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à $\lambda_{S_n}^{max}$ et notons $v_1, v_2, \dots, v_n$ ses composantes.
 (a) Vérifier que pour $n \geq 2$, $\lambda_{S_{n-1}}^{max} < \lambda_{S_n}^{max}$.
 (b) Montrer que $v_n \neq 0$ (raisonner par l'absurde).
 (c) Déduire que $\lambda_{S_n}^{max}$ est une valeur propre simple.
7. Posons $S_n = PD_n {}^tP$ avec $D_n = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale formée par les valeurs propres de S_n écrites dans l'ordre croissant où $\lambda_n = \lambda_{S_n}^{max}$ et P une matrice orthogonale formée de vecteurs propres de S_n .

$$(a) \text{ Montrer que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} S_n \right)^k = PD {}^tP \text{ avec } D \text{ une matrice diagonale à préciser.}$$

$$(b) \text{ Déduire alors que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} S_n \right)^k = V {}^tV \text{ avec } V \text{ un vecteur propre associé à } \lambda_n \text{ vérifiant } \|V\| = 1.$$

Partie II :

1)a) Comme la matrice L_n est triangulaire, alors son déterminant vaut le produit des éléments sur la diagonale, c'est-à-dire

$$\det(L_n) = \prod_{i=1}^n L_n(i, i) = \prod_{i=1}^n C_{i-1}^{i-1} = \prod_{i=1}^n 1 = 1$$

donc $\det(L_n) = 1 \neq 0$, ce qui prouve que L_n est inversible. D'autre part, $U_n = {}^t L_n$ et donc $\det(U_n) = \det(L_n) = 1 \neq 0$ ce qui prouve que U_n est inversible.

b)

- Comme la matrice L_n est triangulaire, alors ses valeurs propres sont les éléments sur la diagonale et par conséquent 1 est la seule valeur propre de L_n .

- Supposons que L_n est diagonalisable et donc L_n est semblable à la matrice identité I_n , c'est-à-dire $L_n = P I_n P^{-1} = I_n$ ce qui est absurde et donc L_n n'est pas diagonalisable.

2)a) • On a $S_n = L_n \cdot U_n = L_n \cdot {}^t L_n$ et donc $S_n = L_n \cdot {}^t L_n = S_n$, ce qui prouve que la matrice S_n est symétrique.

- $\det(S_n) = \det(L_n) \cdot \det(U_n) = 1 \neq 0$ et donc S_n est inversible.

b) On a $(X+1)^n (X+1)^m = (X+1)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{m+n}^k X^k$ et donc le coefficient de X^p dans ce polynôme est C_{m+n}^p . D'autre part, on a

$$(X+1)^n (X+1)^m = [C_n^0 + C_n^1 X + \dots + C_n^p X^p + \dots + C_n^n X^n] \cdot [C_m^0 + C_m^1 X + \dots + C_m^p X^p + \dots + C_m^m X^m]$$

et donc, après le développement, le coefficient de X^p est $\sum_{k=0}^p C_n^k C_m^{p-k}$, d'où le résultat.

c) Comme $S_n = L_n \cdot U_n$, alors :

- Si $i \leq j$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(i, j) &= \sum_{k=1}^n L_n(i, k) \cdot U_n(k, j) \\ &= \sum_{k=1}^i L_n(i, k) \cdot U_n(k, j) + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{L_n(i, k)}_0 \cdot U_n(k, j) \\ &= \sum_{k=1}^i C_{i-1}^{k-1} \cdot C_{j-1}^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k \cdot C_{j-1}^k \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^{i-1-k} \cdot C_{j-1}^k \quad (C_{i-1}^k = C_{i-1}^{i-1-k}) \\ &= C_{i+j-2}^{i-1} \quad (\text{formule de Vandermonde}) \end{aligned}$$

- Si $i \geq j$. Comme S_n est symétrique, alors $S_n(i, j) = S_n(j, i) = C_{i+j-2}^{j-1} = C_{i+j-2}^{i-1}$.

On a

$$S_3 = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 \\ C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Corrigé Problème 1

PARTIE 1

1. On pose $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$, $(x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

• $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• $\forall t > 0$, la fonction $x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Soit $[a, b] \subseteq]0, +\infty[$. On a

$$|f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad , \forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[$$

où

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

φ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car elle est continue sur $]0, +\infty[$, au voisinage de 0^+ , $\varphi(t) \sim t^{a-1}$ intégrable d'après Riemann en 0^+ ($\alpha = 1 - a < 1$) et au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc elle est intégrable au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème de continuité, Γ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2. Comme f est positive alors

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \geq \int_2^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \geq 2^{x-1} \int_2^{+\infty} e^{-t}dt \quad , \forall x \geq 1$$

Ainsi $\Gamma(x) \geq e^{-2}2^{x-1}$, $\forall x \geq 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-1} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

3.(a) On a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$, on pose

$$\begin{aligned} u(t) &= t^x \longrightarrow u'(t) = xt^{x-1} \\ v'(t) &= e^{-t} \longrightarrow v(t) = -e^{-t} \end{aligned}$$

et donc $\Gamma(x+1) = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$.

3.(b) On démontre par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.(a) On effectue le changement de variable $t = \sqrt{n} \cos(x)$, $dt = -\sqrt{n} \sin(x) dx$ et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(x))^n \sin(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

4.(b) Il suffit d'étudier les variations de la fonction g définie sur $] -1, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

4.(c) On applique le **théorème de convergence dominée** à la suite de fonctions

$f_n(t) = \chi_{[0, \sqrt{n}]}(1 - \frac{t^2}{n})^n$. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0, +\infty[$; f_n converge simplement vers $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $]0, +\infty[$, qui est aussi continue. De plus pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$, $0 \leq 1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$ ce qui implique que $(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$ et par suite $|f_n(t)| \leq e^{-t^2}$, qui est intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

c à d

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

4.(d) D'après 4.(a), on déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\text{D'où } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

• En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

4.(e) Par itération on a

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1) \dots 3 \cdot 1}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

On démontre alors le résultat par récurrence.

PARTIE 2

1.(a) On suppose que $a(x)$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors $\forall x \in]0, R[$,

$$\begin{cases} y_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r} \\ y'_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \\ y''_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}. \end{cases}$$

y_r est une solution de (E_α) si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+r)^2 - \alpha^2] a_n x^{n+r} = - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n+r}$$

On simplifie par x^r et on identifie les deux séries entières, on trouve

$$\begin{cases} (r^2 - \alpha^2) a_0 = 0 & (1) \\ (2r+1) a_1 = 0 & (2) \\ \forall n \geq 2, [(n+r)^2 - \alpha^2] a_n = -a_{n-2} & (3) \end{cases}$$

Ainsi comme $a_0 \neq 0$ alors $(1) \Rightarrow r = \pm \alpha$. De plus $\alpha \neq \frac{1}{2} \Rightarrow r \neq -\frac{1}{2}$ et $2r+1 \neq 0$ donc

$(2) \Rightarrow a_1 = 0$. $(3) \Rightarrow (n^2 + 2nr) a_n = -a_{n-2}$.

1.(b) On considère $r = \alpha > 0$. Comme $a_1 = 0$, $(3) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$. De plus

$$\begin{aligned} n=2 \quad a_2 &= -\frac{1}{2(2+2\alpha)} a_0 \\ n=4 \quad a_4 &= -\frac{1}{4(4+2\alpha)} a_2 \\ &\vdots \\ n=2p \quad a_{2p} &= -\frac{1}{2p(2p+2\alpha)} a_{2p-2} \end{aligned}$$

En multipliant terme à terme, on a $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(\alpha+1)\dots(\alpha+p)}a_0$, pour tout $p \geq 1$. (le résultat se vérifie facilement par récurrence). Par suite

$$y_\alpha(x) = a_0 x^\alpha \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(\alpha+1)\dots(\alpha+p)} x^{2p} \right)$$

Posons $U_p(x) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(\alpha+1)\dots(\alpha+p)} x^{2p}$, on a $\left| \frac{U_{p+1}}{U_p} \right| = \frac{|x|^2}{2^2(p+1)(\alpha+p+1)} \rightarrow 0 < 1$ quand $p \rightarrow +\infty$. Alors, d'après le critère de D'Alembert, $\sum U_n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $R = +\infty$.

1.(c) De même pour $r = -\alpha$, par itération on a si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(-\alpha+1)\dots(-\alpha+p)}a_0$. Par suite

$$y_{-\alpha}(x) = a_0 x^{-\alpha} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(-\alpha+1)\dots(-\alpha+p)} x^{2p}$$

Pour $U_p(x) = \frac{(-1)^p}{2^{2p}p!(-\alpha+1)\dots(-\alpha+p)} x^{2p}$, on a $\left| \frac{U_{p+1}}{U_p} \right| = \frac{|x|^2}{2^2(p+1)|-\alpha+p+1|} \rightarrow 0 < 1$ quand $p \rightarrow +\infty$. Alors, d'après le critère de D'Alembert, $\sum U_n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où $R = +\infty$.

1.(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\alpha} y_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0(-1)^p}{2^{2p}p!(\alpha+1)\dots(\alpha+p)} x^{2p} = a_0 \neq 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha y_{-\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0(-1)^p}{2^{2p}p!(-\alpha+1)\dots(-\alpha+p)} x^{2p} = a_0 \neq 0.$$

Alors les fonctions $y_\alpha(x) \sim_{0^+} a_0 x^{-\alpha} \rightarrow \text{sign}(a_0)\infty$ et $y_{-\alpha}(x) \sim_{0^+} a_0 x^\alpha \rightarrow 0$ ce qui prouve que y_α et $y_{-\alpha}$ sont linéairement indépendantes. (par l'absurde)

1.(e) Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus (\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\})$, on a trouvé que y_α et $y_{-\alpha}$ sont deux solutions de (E_α) linéairement indépendantes. Or (E_α) est une équation différentielle homogène de second ordre, donc l'ensemble des solutions est un e.v de dimension 2. Ainsi $y = Ay_\alpha + By_{-\alpha}$, A et $B \in \mathbb{R}$.

2.(a) On a $y(x) = x^{-\frac{1}{2}}u(x)$ donc $y'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}u(x) + x^{\frac{1}{2}}u'(x)$ et $y''(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}u(x) - x^{-\frac{3}{2}}u'(x) + x^{-\frac{1}{2}}u''(x)$. y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si et seulement si u est solution de

$$(E) : \quad u''(x) + u(x) = 0$$

2.(b) On a (E) est une équation différentielle homogène de second ordre, donc l'ensemble des solutions est un e.v de dimension 2. De plus $\sin$ et $\cos$ forment une base de solutions alors $u(x) = A \sin(x) + B \cos(x)$, où A et $B \in \mathbb{R}$. Ce qui donne $y(x) = A \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + B \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$.

3.(a) Il suffit de voir que $(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$.

3.(b) On utilise Partie 1, 4.(e) pour $n+1$ et n : $J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{\pi}(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{\pi}(2n)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

4. Pour x fixé dans $]0, +\infty[$, on pose $f_n(\alpha) = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$.

• On a d'après 2.(b) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \Gamma(\alpha + n + 1) = +\infty$. Par suite $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f_n(\alpha) = 0$.

• D'après 2. de la Partie 1, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1} e^{-2} \geq e^{-2}$ pour tout $x > 1$.

Ainsi $\forall \alpha > 0, n \in \mathbb{N}, |f_n(\alpha)| \leq e^2 \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!} = u_n$ telle que $\sum u_n < +\infty$. Ainsi $\sum f_n$ CV normalement sur $]0, +\infty[$. Ce qui justifie la permutation limite et somme.

PARTIE 3

1.(a) Il s'agit d'une intégrale dépendant d'un paramètre sur un segment. On pose $h(x, t) = \cos(x \sin t - pt)$. On a h est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ donc F_p est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. $F_p(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-pt) dt$. Donc si $p = 0$ alors $F_p(0) = 1$ et si $p \neq 0$ alors

$$F_p(0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\sin(pt)}{p} \right]_0^\pi = 0$$

1.(b) On applique le théorème de dérivation pour une intégrale dépendant d'un paramètre sur un segment. On a h est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ et on a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\sin t \sin(x \sin t - pt) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = -(\sin t)^2 \cos(x \sin t - pt).$$

Par suite F_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a

$$F'_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin(x \sin t - pt) dt$$

et

$$F''_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin t)^2 \cos(x \sin t - pt) dt.$$

1.(c) On effectue l'intégration par partie

$$\begin{cases} u(t) = \sin(x \sin t - pt) \\ v'(t) = \sin t \end{cases} \implies \begin{cases} u'(t) = (x \cos t - p) \cos(x \sin t - pt) \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$$

on a

$$F'_p(x) = -\frac{1}{\pi} \left(\underbrace{[-\cos t \sin(x \sin t - pt)]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi (x(\cos t)^2 - p \cos t) \cos(x \sin t - pt) dt \right).$$

1.(d) Ainsi

$$\begin{aligned} x^2 F''_p(x) + x F'_p(x) + (x^2 - p^2) F_p(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (px \cos t - p^2) \cos(x \sin t - pt) dt \\ &= \frac{p}{\pi} [\sin(x \sin t - pt)]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

D'où F_p est une solution de (E_p) pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.(a) On applique le théorème de permutation $\sum$ et $\int$ sur un segment. On pose $u_n(t) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, on a $|u_n(t)| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} = \alpha_n$; $\sum \alpha_n < +\infty$. Donc $\sum u_n$ CN sur $[0, \pi]$ ce qui implique que

$\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$. Ce qui donne le resultat.

2.(b) Pour $n \geq 1$, on effectue l'intégration par partie

$$\begin{cases} u(t) = (\sin t)^{2n-1} \\ v'(t) = \sin t \end{cases} \implies \begin{cases} u'(t) = (2n-1) \cos t (\sin t)^{2n-2} \\ v(t) = -\cos t \end{cases},$$

on a

$$I_{2n} = \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{[-\cos t (\sin t)^{2n-1}]_0^\pi}_{=0} + (2n-1) \int_0^\pi (1 - (\sin t)^2) (\sin t)^{2n-2} dt \right).$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$, $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$.

2.(c) On a $I_0 = 1$. Par itération, on trouve que $I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2n}(k!)^2}$. On remplace I_{2k} dans

l'expression de F trouvée dans 2.(a) on a $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = J_0(x)$.

3.(a) On a $\begin{cases} y'(x) = g'(x)J_0(x) + g(x)J_0'(x) \\ y''(x) = g''(x)J_0(x) + 2g'(x)J_0'(x) + g(x)J_0''(x) \end{cases}$ y est solution de E_0 alors

$$\underbrace{[x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x)]}_{=0} g(x) + x^2 g''(x) J_0(x) + [2x^2 J_0'(x) + x J_0(x)] g'(x) = 0$$

car J_0 est solution de (E_0) . Donc on a le résultat pour tout $x > 0$.

3.(b) On a $J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \implies J_0(0) = 1 > 0$. Comme J_0 est continue alors il existe un voisinage de 0 dans lequel J_0 est strictement positive. D'où l'existence de $\beta > 0$ tel que $J_0(x) > 0, \forall x \in]0, \beta[$.

3.(c) On a $u'(x) = \left(-2 \frac{J_0'(x)}{J_0(x)} - \frac{1}{x}\right) u(x)$. Par suite $u(x) = K \cdot e^{\int \left(-2 \frac{J_0'(x)}{J_0(x)} - \frac{1}{x}\right) dx} = K \cdot \frac{1}{x J_0(x)^2}$.

4.(a) On a u_0 est continue sur $]0, \beta[$ car J_0 est continue (SE) ne s'annulant pas sur $]0, \beta[$ donc elle admet une primitive sur $]0, \beta[$.

4.(b) Au voisinage de 0, on a $u_0(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 - J_0(x)^2}{x J_0(x)^2} = \frac{x}{2} + o(x)$. Car $J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$.

4.(c) La primitive de $x \mapsto u_0(x) - \frac{1}{x}$ a aussi un développement limité au voisinage de 0 donné par $\frac{x^2}{4} + o(x^2) + cte$. Par suite $g_0(x) - \ln(x) = Cte + O(x^2)$.

4.(d) On a $x \mapsto g_0(x)J_0(x)$ et $x \mapsto J_0(x)$ sont deux solutions de (E_0) sur $]0, \beta[$. Il suffit de prouver qu'elles sont linéairement indépendantes. (Par l'absurde et comportement en 0).

Corrigé Problème 2

Partie I :

1) Les partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont :

$\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

donc $B_3 = 5$.

2)a) Le nombre de partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ qui sont de la forme $\mathcal{P}_k$ est $C_n^k B_{n-k}$ avec C_n^k le nombre de choix de k entiers dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et B_{n-k} désigne le nombre de partitions des $n-k$ éléments restants de $\llbracket 1, n \rrbracket$. D'autre part pour $k \neq k'$, on a $\mathcal{P}_k \neq \mathcal{P}_{k'}$ et donc

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} B_k = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

cette relation est encore vraie pour $n = 0$, d'où le résultat.

$$\bullet B_4 = \sum_{k=0}^3 C_3^k B_k = B_0 + 3B_1 + 3B_2 + 1B_3 = 1 + 3 + 6 + 5 = 15.$$

$$\bullet B_5 = \sum_{k=0}^4 C_4^k B_k = 1 + 4.1 + 6.2 + 4.5 + 1.15 = 52.$$

b) Pour $n = 0$, on a $B_0 = 1 \leq 0!$. Supposons que $B_n \leq n!$ avec $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $B_{n+1} \leq (n+1)!$. On a

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k \leq \sum_{k=0}^n C_n^k k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!}$$

or $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$ et donc $B_{n+1} \leq n! \sum_{k=0}^n 1 = n!(n+1) = (n+1)!$, d'où le résultat.

3)a) On a $B_n \leq n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\frac{B_n}{n!} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et par conséquent le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de

la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$, c'est-à-dire $R \geq 1$.

b) f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et donc f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{B_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n, \quad \forall x \in] -1, 1[$$

c) On a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$, $\forall x \in] -1, 1[$ et $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et par la formule du Produit de Cauchy, on déduit que

$$e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad \forall x \in] -1, 1[$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n! B_k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k B_k = \frac{B_{n+1}}{n!}$ et par suite

$$e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n, \quad \forall x \in] -1, 1[$$

et d'après la question précédente, on déduit que $f'(x) = e^x \cdot f(x)$, $\forall x \in] -1, 1[$.

d) On a $f'(x) = e^x \cdot f(x)$, $\forall x \in]-1, 1[$ et donc f est solution sur $] - 1, 1[$ de l'équation différentielle $y' - e^x y = 0$ et par suite :

$$f(x) = \alpha e^{e^x}, \forall x \in]-1, 1[$$

or $f(0) = 1$, donc $\alpha \cdot e = 1$, c'est-à-dire $\alpha = e^{-1}$. Finalement, on obtient :

$$f(x) = e^{e^x - 1}, \forall x \in]-1, 1[$$

4)a) On a $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$, $\forall x \in]-1, 1[$, or

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$$

et donc $f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!}$, $\forall x \in]-1, 1[$.

Posons $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{n!}$, $x \in]-1, 1[$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $] - 1, 1[$ vers f .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur $] - 1, 1[$ et on a

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{n^p e^{nx}}{n!}, \forall x \in]-1, 1[, p \geq 1$$

- On a $|f_n^{(p)}(x)| = \frac{n^p e^{nx}}{n!} \leq \frac{n^p e^n}{n!}$, $\forall x \in]-1, 1[, \forall n \in \mathbb{N}$ et comme la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^p e^n}{n!}$ converge, en effet par la **règle de D'Alembert**, on a

$$\frac{(n+1)^p e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^p e^n} = \frac{e}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

ainsi pour tout $p \geq 1$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge normalement et en particulier uniformément sur $] - 1, 1[$.

Finalement, par le théorème de dérivation, on déduit que f est de classe C^∞ sur $] - 1, 1[$ et

$$f^{(p)}(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p e^{nx}}{n!}, \forall x \in]-1, 1[, \forall p \geq 1$$

b) f est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ et donc $\frac{B_p}{p!} = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ et par conséquent $B_p = f^{(p)}(0)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, or d'après la question précédente, on a

$$f^{(p)}(0) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}, \forall p \in \mathbb{N}$$

Finalement, on obtient $B_p = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ (**Formule de Dobinski**).

5)a) On a $P(X = n) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et d'après la **Formule de Dobinski**, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{5e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = \frac{B_3}{5} = 1 \quad (\text{car } B_3 = 5)$$

d'où l'existence de la variable aléatoire X .

b) • On a $\sum_{n \geq 0} n \cdot P(X = n) = \frac{1}{5e} \sum_{n \geq 0} \frac{n^4}{n!}$, or d'après la Formule de Dobinski, cette série est convergente, ce qui prouve que la variable aléatoire X est d'espérance finie et on a :

$$E(X) = \frac{1}{5e} \sum_{n \geq 0} \frac{n^4}{n!} = \frac{B_4}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

donc $E(X) = 3$.

• On a $\sum_{n \geq 0} n^2 \cdot P(X = n) = \frac{1}{5e} \sum_{n \geq 0} \frac{n^5}{n!}$, or d'après la Formule de Dobinski, cette série est convergente, ce qui prouve que la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie et on a

$$E(X^2) = \frac{1}{5e} \sum_{n \geq 0} \frac{n^5}{n!} = \frac{B_5}{5} = \frac{52}{5}$$

Ainsi

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{52}{5} - 9 = \frac{7}{5}$$

c) • On a $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = \frac{1}{5e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} t^n$, or

$$\left| \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} \right| = \frac{(n+1)^2}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc d'après la règle de D'Alembert, le rayon de convergence de G_X vaut $+\infty$.

• On a $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, en dérivant et en multipliant par t , on obtient :

$$te^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nt^n}{n!}, \forall t \in \mathbb{R}$$

en dérivant et en multipliant par t , on obtient : $(t^2 + t)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 t^n}{n!}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

en dérivant et en multipliant par t , on obtient : $t(t^2 + 3t + 1)e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 t^n}{n!}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

et par suite $G_X(t) = \frac{(t^3 + 3t^2 + t)e^t}{5e} = \frac{1}{5}(t^3 + 3t^2 + t)e^{t-1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Remarque : On peut aussi écrire $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)t^n}{n!} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nt^n}{n!} \\ &= t^3 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} + 3t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= t^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + 3t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \\ &= (t^3 + 3t^2 + t)e^t \end{aligned}$$

Partie II :

1)a) Comme la matrice L_n est triangulaire, alors son déterminant vaut le produit des éléments sur la diagonale, c'est-à-dire

$$\det(L_n) = \prod_{i=1}^n L_n(i, i) = \prod_{i=1}^n C_{i-1}^{i-1} = \prod_{i=1}^n 1 = 1$$

donc $\det(L_n) = 1 \neq 0$, ce qui prouve que L_n est inversible. D'autre part, $U_n = {}^t L_n$ et donc $\det(U_n) = \det(L_n) = 1 \neq 0$ ce qui prouve que U_n est inversible.

b)

- Comme la matrice L_n est triangulaire, alors ses valeurs propres sont les éléments sur la diagonale et par conséquent 1 est la seule valeur propre de L_n .

- Supposons que L_n est diagonalisable et donc L_n est semblable à la matrice identité I_n , c'est-à-dire $L_n = P I_n P^{-1} = I_n$ ce qui est absurde et donc L_n n'est pas diagonalisable.

2)a) • On a $S_n = L_n \cdot U_n = L_n \cdot {}^t L_n$ et donc $S_n = L_n \cdot {}^t L_n = S_n$, ce qui prouve que la matrice S_n est symétrique.

- $\det(S_n) = \det(L_n) \cdot \det(U_n) = 1 \neq 0$ et donc S_n est inversible.

b) On a $(X+1)^n (X+1)^m = (X+1)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{m+n}^k X^k$ et donc le coefficient de X^p dans ce polynôme est C_{m+n}^p . D'autre part, on a

$$(X+1)^n (X+1)^m = [C_n^0 + C_n^1 X + \dots + C_n^p X^p + \dots + C_n^n X^n] \cdot [C_m^0 + C_m^1 X + \dots + C_m^p X^p + \dots + C_m^m X^m]$$

et donc, après le développement, le coefficient de X^p est $\sum_{k=0}^p C_n^k C_m^{p-k}$, d'où le résultat.

c) Comme $S_n = L_n \cdot U_n$, alors :

- Si $i \leq j$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(i, j) &= \sum_{k=1}^n L_n(i, k) \cdot U_n(k, j) \\ &= \sum_{k=1}^i L_n(i, k) \cdot U_n(k, j) + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{L_n(i, k)}_0 \cdot U_n(k, j) \\ &= \sum_{k=1}^i C_{i-1}^{k-1} \cdot C_{j-1}^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k \cdot C_{j-1}^k \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^{i-1-k} \cdot C_{j-1}^k \quad (C_{i-1}^k = C_{i-1}^{i-1-k}) \\ &= C_{i+j-2}^{i-1} \quad (\text{formule de Vandermonde}) \end{aligned}$$

- Si $i \geq j$. Comme S_n est symétrique, alors $S_n(i, j) = S_n(j, i) = C_{i+j-2}^{j-1} = C_{i+j-2}^{i-1}$.

On a

$$S_3 = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 \\ C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & C_3^0 \\ C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & C_4^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & C_5^2 \\ C_3^3 & C_4^3 & C_5^3 & C_6^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

d) •

$$\begin{aligned} C_{n+1}^k - C_n^k &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{n+1}{n+1-k} - 1 \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k}{n+1-k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = C_n^{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_n(n, j) &= \sum_{j=1}^n C_{n+j-2}^{n-1} \\ &= C_{n-1}^{n-1} + \sum_{j=2}^n C_{n+j-2}^{n-1} \\ &= C_{n-1}^{n-1} + \sum_{j=2}^n (C_{n+j-1}^n - C_{n+j-2}^n) \\ &= C_{n-1}^{n-1} + (C_{2n-1}^n - C_n^n) \\ &= C_{2n-1}^n \end{aligned}$$

$$C_{2n-1}^n = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = \frac{1}{2} \frac{(2n)(2n-1)!}{n(n-1)!n!} = \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{2} C_{2n}^n, \text{ d'où le résultat.}$$

3)a) Comme S_n est symétrique réelle, alors d'après le **théorème spectral**, les valeurs propres de S_n sont réelles et comme S_n est inversible, alors elles sont non nulles.

b) On a ${}^tXS_nX = {}^tXL_nU_nX = {}^tXU_nU_nX = {}^t(U_nX).(U_nX) = \|U_nX\|^2$.

c) Soit λ une valeur propre de S_n et soit X un vecteur propre associé à λ , c'est-à-dire $S_nX = \lambda X$. D'après la question précédente, on a ${}^tXS_nX = \|U_nX\|^2$ et par conséquent ${}^tX\lambda X = \|U_nX\|^2$ ou encore $\lambda \|X\|^2 = \|U_nX\|^2$ ce qui prouve que λ est positive et sachant qu'elle est non nulle, alors $\lambda > 0$.

4)a) On a $S_nX = \lambda X$, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^n S_n(i, j)x_j = \lambda x_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour $i = m$, on obtient $\sum_{j=1}^n S_n(m, j)x_j = \lambda x_m$. Ainsi

$$\lambda |x_m| \leq \sum_{j=1}^n S_n(m, j)|x_j| \leq \sum_{j=1}^n S_n(m, j)|x_m| = |x_m| \sum_{j=1}^n S_n(m, j)$$

et comme $|x_m| > 0$, alors $\lambda \leq \sum_{j=1}^n S_n(m, j)$.

b) • On a

$$S_n(i+1, j) = C_{i+j-1}^i = \frac{(i+j-1)!}{i!(j-1)!} = \frac{(i+j-1)}{i} \cdot \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} = \frac{(i+j-1)}{i} \cdot C_{i+j-2}^{i-1}$$

et donc $S_n(i+1, j) = \frac{(i+j-1)}{i} S_n(i, j) \geq S_n(i, j)$.

• D'après le premier point, chaque coefficient de la matrice S_n est plus petit du coefficient au dessous et donc la somme des coefficients de la dernière ligne de S_n est la plus grande que la somme des coefficients de toute autre ligne et par conséquent

$$\sum_{j=1}^n S_n(m, j) \leq \sum_{j=1}^n S_n(n, j) = \frac{1}{2} C_{2n}^n$$

ce qui prouve que $\lambda \leq \frac{1}{2} C_{2n}^n$.

5)a) Comme S_n est symétrique réelle, alors d'après le **théorème spectral**, elle est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et notons $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$, on a

$$\|S_n X\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \leq \lambda_n^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n^2 \|X\|^2$$

donc $\|S_n X\| \leq \lambda_n \|X\|$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) On prend $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $S_n X = \begin{pmatrix} S_n(1, n) \\ S_n(2, n) \\ \vdots \\ S_n(n, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{n-1}^0 \\ C_n^1 \\ \vdots \\ C_{2n-2}^{n-1} \end{pmatrix}$ (c'est la dernière

colonne de S_n), et l'inégalité de la question précédente devient :

$$\lambda_n \geq \sqrt{(C_{n-1}^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_{2n-2}^{n-1})^2} > C_{2n-2}^{n-1}$$

6)a) D'après 5)c) on a $\lambda_{S_n}^{max} > C_{2n-2}^{n-1}$ et d'après 4)b) on a $\lambda_{S_{n-1}}^{max} \leq \frac{1}{2} C_{2n-2}^{n-1} < C_{2n-2}^{n-1}$ et par suite $\lambda_{S_{n-1}}^{max} < \lambda_{S_n}^{max}$.

b) On a $S_n V = \lambda_{S_n}^{max} V$, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n S_n(i, j) v_j = \lambda_{S_n}^{max} v_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

donc, si on suppose que $v_n = 0$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n-1} S_n(i, j) v_j = \lambda_{S_n}^{max} v_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1$$

et comme $S_n(i, j) = S_{n-1}(i, j) = C_{i+j-2}^{i-1}$, $\forall 1 \leq i \leq n-1$, alors

$$\sum_{j=1}^{n-1} S_{n-1}(i, j) v_j = \lambda_{S_n}^{max} v_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1$$

ce qui prouve que $\lambda_{S_n}^{max}$ est une valeur propre de S_{n-1} et donc $\lambda_{S_n}^{max} \leq \lambda_{S_{n-1}}^{max}$, ce qui est absurde et donc $v_n \neq 0$.

c) Supposons que $\lambda_{S_n}^{max}$ n'est pas une valeur propre simple. Soit donc V et W deux vecteurs propres non colinéaires associés à la valeur propre $\lambda_{S_n}^{max}$ et notons $v_1, v_2, \dots, v_n$ et $w_1, w_2, \dots, w_n$ leurs composantes respectivement. D'après ce qui précède, on a $v_n \neq 0$ et $w_n \neq 0$, donc $w_n V - v_n W$ est aussi un vecteur propre associé à $\lambda_{S_n}^{max}$, or la dernière composante de $w_n V - v_n W$ est nulle ce qui est absurde et par suite $\lambda_{S_n}^{max}$ est une valeur propre simple.

7)a) On a $S_n^k = P D_n^k {}^tP$ et donc $\left(\frac{1}{\lambda_n} S_n\right)^k = P \left(\frac{1}{\lambda_n} D_n\right)^k {}^tP$, or on a

$$\left(\frac{1}{\lambda_n} D_n\right)^k = \text{diag}\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k, \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^k, 1\right)$$

et comme λ_n est simple, alors les autres valeurs propres sont strictement inférieures à λ_n , ce qui implique que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} D_n\right)^k = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1)$$

finalement, on obtient $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} S_n\right)^k = P D {}^tP$ avec $D = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, 1)$.

b) V est en fait la dernière colonne de P et notons $v_1, v_2, \dots, v_n$ ses composantes. On a

$$P D = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & v_1 \\ 0 & \dots & 0 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$P D {}^tP = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & v_1 \\ 0 & \dots & 0 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} = V {}^tV$$

Finalement, on obtient $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} S_n\right)^k = V {}^tV$.