

Algèbre / Mathématiques
E.S. N°1

N.B.S.V.P. : L'ensemble des nombres complexes est désigné par $\mathbb{C}$ et il est préférable de préciser en fin de chaque réponse la réponse définitive (soulignée ou encadrée).

Exercice 1 : Soit le polynôme A à coefficients réels et à variable x donné par,

$$A(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

1. Prouvez que 1 est une racine double de A .
2. Justifiez que i et -2 sont des racines simples de A et déduire toutes les racines de ce polynôme, deux à deux distinctes, en précisant les simples et les doubles.
3. Déduire la factorisation (maximale) du polynôme A pour x variable de $\mathbb{C}$.
4. Déduire la factorisation (maximale) du polynôme A pour x variable de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Prouvez qu'il existe u et φ des réels avec $u > 0$ tels que,

$$a \cos x + b \sin x = u \cos(x - \varphi) \quad , \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

[Ind. : On détermine $\operatorname{Re}((a + ib)e^{-ix})$ et on écrit $a + ib$ sous forme exponentielle]

2. Soit y de $\mathbb{R}$. Prouvez l'égalité, $1 - e^{iy} = -2i \sin(y/2) e^{iy/2}$.
3. Soient z de $\mathbb{C}$ et n de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminez la somme $1 + z + z^2 + \dots + z^n$.

Exercice 3 : Soit le polynôme $P(x) = x^5 - 1$.

1. Prouvez que toute racine de P dans $\mathbb{C}$ est une racine simple (autrement dit, l'ordre de multiplicité de toute racine est 1).

[Ind. : On peut utiliser un raisonnement par l'absurde].

2. Déterminez toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$.

[Rappel : Pour n de $\mathbb{N}^*$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^n = 1$ sont les n nombres $z_k = e^{ik2\pi/n}$, où $k = 0, \dots, n-1$]

3. Déduire la factorisation (maximale) du polynôme P , où x est variable complexe.
4. Déduire la factorisation maximale du polynôme P , où x est variable réelle.
5. Déduire la factorisation maximale du polynôme $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ où x est un réel.

Bon Travail