

UNIVERSITÉ DE SFAX
* * * * *
INSTITUT PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIEURS DE SFAX

Section: P.B.1

A.U. 2015/2016

Devoir de controle du 1^{er} semestre en Analyse

Date: 03 Novembre 2015

Durée: 1 Heure 30 min

Nombre de pages: 2

N.B Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1:(6 points).

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1. (E) : $e^x - e^{-x} = 2$.
2. (F) : $x - |x| = \sqrt{1-x}$.
3. (G) : $\frac{mx-1}{x+1} = x$, m étant un paramètre réel.

Exercice 2:(7 points)

On considère les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = w_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + \sqrt{2}v_n \\ v_{n+1} &= \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n \\ w_{n+1} &= \sqrt{2}v_n + w_n \end{cases}$$

1. Soit $d_n = u_n - w_n$. Montrer que (d_n) est une suite constante.
2. Soit $S_n = u_n + w_n$. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et v_n .
3. Exprimer v_{n+2} en fonction de S_{n+1} et v_{n+1} .
4. Dédire que $v_{n+2} = 3v_n + 2v_{n+1}$.
5. Déterminer v_n en fonction de n .
6. Déterminer S_n en fonction de n .
7. Déterminer u_n et w_n en fonction de n .

Exercice 3:(7 points)

On se propose d'étudier les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant le problème:

$$(P) : \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$$

1. Soit f une solution de (P) ,
 - (a) Trouver $f(0)$.
 - (b) Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.
 - (c) Montrer que si $f(0) \neq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
 - (d) Montrer que si $f(0) \neq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ (Indication $x = \frac{x+x}{2}$).
2. On suppose que f est une solution non nulle de (P) .
 - (a) Vérifier que si f est constante alors $f : x \mapsto 1$
 - (b) Soit $h : x \mapsto \ln(f(x))$, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, h(x+y) = h(x) + h(y)$.
3. Vérifier que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$ est une solution de (P) .