

* * * * *

Institut Préparatoire aux Etudes
D'ingénieurs de Sfax

Examen d'Analyse N°1

Section : PB1

Durée : 2heures

N. de pages : 02

N.B: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

I : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : f'(x)\cos(f(x)) - \sin(f(x)) = 0$$

1. Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $-f$ l'est aussi.
2. Effectuer le changement d'inconnue $h(x) = \sin(f(x))$ dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution de l'équation

$$(E') : h'(x) - h(x) = 0$$

3. Déterminer les solutions de (E') .
4. En déduire les solutions de (E) .

II : Soient $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = f\left(\frac{1}{4x}\right)$$

1. Montrer que

$$(E) : f''(x) + \frac{1}{4x^2}f(x) = 0$$

2. Effectuer le changement d'inconnue $f(x) = g(\ln(x))$ dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution de l'équation

$$(E') : 4g''(\ln(x)) - 4g'(\ln(x)) + g(\ln(x)) = 0$$

3. Déterminer les solutions de (E') .
4. En déduire les solutions de (E) .

Exercice 2

I : Soient $0 < a < b$ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$; définies par : $u_0 = a, w_0 = b$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{w_n}}, w_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}$$

1. Montrer par récurrence que, $u_n > 0$ et $w_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n - u_n \geq 0$.
3. Montrer que w_n est décroissante et u_n est croissante.
4. Montrer par récurrence que, $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.
5. En déduire que u_n et w_n sont adjacentes.

II : Dans cette partie, n désigne un entier naturel, a un réel strictement positif. On note

$$u_n = \frac{1}{n!} \int_0^a e^{-x} x^n dx$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$. En déduire que (u_n) est décroissante.
2. Calculer u_0 et montrer que $\lim_{a \rightarrow +\infty} u_0 = 1$.
3. Montrer par récurrence que pour tout n , $\lim_{a \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
4. Montrer que pour tout n , $u_n = 1 - e^a \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$
5. On suppose que $0 < a < 1$. Montrer que pour tout entier naturel k :

$$0 \leq \frac{a^k}{k!} \leq a^k$$

6. Montrer que u_n est bornée.
7. En déduire que u_n est convergente.

Bon Travail