

UNIVERSITÉ DE SFAX

* * * * *

INSTITUT PRÉPARATOIRE AUX ÉTUDES D'INGÉNIEURS DE SFAX

Section: B.G.1

A.U. 2017/2018

Devoir de contrôle du 1^{er} semestre en Algèbre

Date: 24 octobre 2017

Durée: 1 Heure

Nombre de pages: 1

N.B L'usage d'une calculatrice n'est pas autorisé.

Problème :

(1) (a) Justifier que pour tout réel t , $1 - e^{it} = -2i \sin(\frac{t}{2})e^{i\frac{t}{2}}$.

(b) Dédurre la forme exponentielle de $1 - e^{it}$ pour $t \in]0, 2\pi[$.

(2) (a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

(b) Calculer la somme $T = \sum_{k=0}^{22} e^{i\frac{k\pi}{23}}$.

(c) Dédurre que $T = 1 + i \frac{\cos(\frac{\pi}{46})}{\sin(\frac{\pi}{46})}$ (en utilisant 1 (a)).

(d) Dédurre la somme $S = \sum_{k=0}^{22} \sin(\frac{k\pi}{23})$.

(3) a) Soit $S_1 = \sum_{k=12}^{22} \sin(\frac{k\pi}{23})$. Montrer à l'aide du changement de variable $p = 23 - k$,

que: $S_1 = \sum_{p=0}^{11} \sin(\frac{p\pi}{23})$. (on rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$)

(b) En déduire que $S_1 = \frac{1}{2}S$.

(c) Trouver $|e^{i\frac{2k\pi}{23}} - 1|$ pour $k \in \{0, \dots, 11\}$. (Indication: utiliser 1 (b))

(d) Dédurre $S_2 = \sum_{k=0}^{11} |e^{i\frac{2k\pi}{23}} - 1|$.

Bon travail.