

Algèbre / E.S.
[1^{er} Semestre]

N.B.S.V.P. : L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée. On rappelle que pour toute question *la réponse est à justifier* (et il est préférable de *bien préciser sa réponse définitive*, en la soulignant ou l'encadrant par exemple).

Exercice 1 : Déterminer par la méthode des transformations élémentaires (méthode de Gauss)

les solutions x, y et z dans $\mathbb{R}$ du système d'équations (S) suivant,

$$(S): \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Soit λ un nombre réel et le système d'équations (S_λ) suivant,

$$(S_\lambda): \begin{cases} x + y + z = -3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = \lambda \end{cases}$$

où x, y et z sont dans $\mathbb{R}$.

1) Prouver que pour $\lambda \neq 3$, ce système (S_λ) ne possède pas de solutions x, y et z dans $\mathbb{R}$.

2) Soit $\lambda = 3$ et (S) le système (S_3) :

$$(S): \begin{cases} x + y + z = -3 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$$

Déterminer les solutions x, y et z dans $\mathbb{R}$ du système (S).

Exercice 3 : Soient l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ et le deux applications φ et ψ de E vers E données par,

$$\begin{aligned} \varphi(a) = b & \quad , \quad \varphi(b) = c & \quad , \quad \varphi(c) = d & \quad , \quad \varphi(d) = a & \quad , \quad \varphi(e) = e \\ \psi(a) = e & \quad , \quad \psi(b) = b & \quad , \quad \psi(c) = e & \quad , \quad \psi(d) = d & \quad , \quad \psi(e) = e \end{aligned}$$

1) L'application φ est-elle bijective ?

2) L'application ψ est-elle injective ?

3) L'application ψ est-elle surjective ?

4) i) Déterminer l'application φ^2 (où φ^2 est définie par $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$) et aussi l'application φ^3 (définie par $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2$).

ii) En déduire l'application φ^4 (définie par $\varphi^4 = \varphi \circ \varphi^3$) et que $\varphi^4 = \text{Id}_E$, où Id_E est (par définition) l'application de E vers E telle que $\text{Id}_E(x) = x$, pour tout x de E .

(On rappelle que déterminer une application revient à donner l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'image de chaque élément de l'ensemble de départ).

5) Sachant que pour n de $\mathbb{N}$, $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n (= \varphi^n \circ \varphi)$ avec $\varphi^0 = \text{Id}_E$, prouver en raisonnant par récurrence sur n , que pour tous n et m de $\mathbb{N}$, $\varphi^n \circ \varphi^m = \varphi^{n+m}$.

(Indication : On utilise l'entier n comme variable de récurrence tout en regardant l'entier m comme nombre fixé).

6) Sachant qu'en plus $(\varphi^n)^m = \varphi^{nm}$, déduire (de 4)ii), 4)i) et 5)) l'application φ^{2018} .

Bonne Chance