

Université de Sfax

Institut Préparatoire aux Etudes D'ingénieurs De Sfax

Matière : Analyse. Section : PB A.U 2017:2018

Devoir de synthèse du 1^{ier} semestre

Durée : 2H

Exercice 1 :

1) On pose $U_n = n$ et $V_n = n - \ln(n)$, $\forall n \geq 1$

a) Montrer que les deux suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ sont équivalentes

b) Montrer que les suites $(e^{U_n})_{n \geq 1}$ et $(e^{V_n})_{n \geq 1}$ ne sont pas équivalentes

2) Soient $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles. Montrer que :

$e^{U_n} \sim e^{V_n}$ Si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

3) Déterminer un équivalent simple des deux suites suivantes et déduire leurs limites:

a) $U_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

b) $V_n = \ln\left(\frac{n^2 + 2 + \sin(n)}{n^2}\right)$.

EXERCICE 2 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y^2 - y = 0$.

On s'intéresse aux solutions de (E) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On pose $z = \frac{1}{y}$.

1) Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution de l'équation (E') : $z' = 1 - z$.

2) Déterminer les solutions de (E').

3) En déduire les solutions de (E).

EXERCICE3 :

Soient a et b deux nombres réels vérifiant: $0 < a \leq b$. On définit deux suites (U_n) et (V_n) par:

$$\begin{cases} U_0 = a ; V_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$.

c) Dédurre que $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$.

2) Montrer que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.