

Algèbre / E.S.N°2

Exercice 1 : Soit la matrice M de $M_3(\mathbb{R})$ donnée par, $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Soit $b \in \mathbb{R}$, déterminer la matrice $M + b I_3$ (où $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$).

2. Soit $N = \begin{bmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{bmatrix}$ de $M_3(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice produit MN .

3. Que peut-on dire de M (est-elle triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, ou diagonale).

4. a) Déterminez la matrice M^2 .

b) Déterminez la matrice M^3 (où M^3 est le produit M^2M).

5. i) Déterminez le déterminant de M .

ii) La matrice M peut-elle être nilpotente, c'est-à-dire peut-il exister un entier naturel non nul k tel que M^k est égale à la matrice nulle (On rappelle que $\det(M^k) = (\det(M))^k$).

Exercice 2 : Soit la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ donnée par, $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le rang de cette matrice A .

2. a) Déterminez le déterminant de A (par règle de Sarrus).

b) Déterminer ce déterminant par développement suivant la ligne N°2.

3. Dédurre que A est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$.

4. Déterminer la matrice inverse de A par la méthode des transformations élémentaires.

5. Dédurre pour tous α, β et γ donnés dans $\mathbb{R}$, les solutions x, y et z dans $\mathbb{R}$ du système,

$$(S): \begin{cases} x - 3y + z = \alpha \\ 2x - 7y = \beta \\ x - 4y - 2z = \gamma \end{cases}$$

Bonne chance