

Institut Préparatoire Aux Etudes D'Ingénieurs De Sfax

Matière:Analyse Section:PB AU : 2017/2018

Examen Du 2nd Semestre Durée 2^h

EXERCICE 1:

Soit n un entier naturel non nul. Nous effectuons n lancers d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) Définissez l'espace probabilisé associé aux n lancers ainsi que la probabilité associée.

2) Calculez la probabilité des deux événements A_n et B_n définis par :

- A_n : Nous obtenons 1 pour la première fois au n -ième lancer.
- B_n : Nous n'obtenons aucun 1 lors des n lancers.

EXERCICE 2:

Pour α réel fixé et $x \in]1, +\infty[$, on considère l'équation différentielle

$$(E): (1 - x^2)y'(x) + (1 - \alpha + 2x)y(x) = 0.$$

1) Trouver en fonction de α les réels a et b tel que $\forall x > 1 : \frac{1 - \alpha + 2x}{1 - x^2} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}$

Puis déduire une primitive de $\frac{1 - \alpha + 2x}{1 - x^2}$.

2) Résoudre alors l'équation différentielle (E) sur $]1, +\infty[$.

3) Pour quelles valeurs de α cette solution peut-être un polynôme.

EXERCICE 3 :

Soit G la fonction définie par :

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{\arctan t}{t} dt$$

- 1) Montrer que G est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $G'(x)$ pour $x \neq 0$.
- 2) Vérifier que G est impaire.
- 3) Montrer que pour tout $x > 0$:
 $\ln(2) \arctan x \leq G(x) \leq \ln(2) \arctan(2x)$. En déduire :
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.
- 4) Montrer que G est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ par une fonction ϕ .
- 5) Montrer que G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- 6) Tracer le graphe de ϕ .