

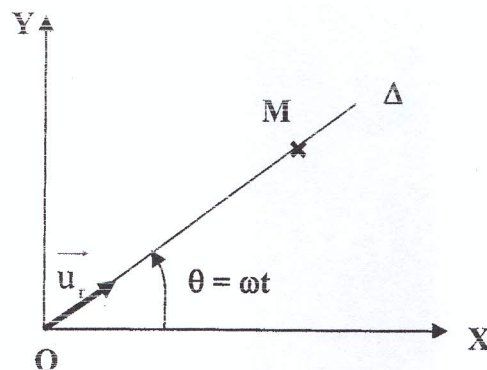
DEVOIR DE CONTROLE N°2
(DUREE : 1h30mn)

N.B: Il sera tenu compte de la présentation des copies.

Exercice 1

Sur une tige Δ , située dans le plan (XOY) d'un référentiel fixe R (OXYZ) de base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se trouve un point M défini par $\vec{OM} = r_0 \sin(\omega t) \vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire de Δ . r_0 et ω sont des constantes positives données. La tige Δ tourne autour de O dans le plan (XOY) avec une vitesse angulaire constante ω .

On attache à la tige Δ un référentiel mobile R' de base orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.



Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ du référentiel R'.

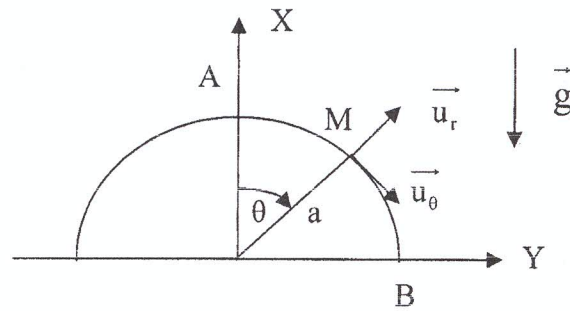
- 1) Déterminer la vitesse $\vec{V}_r$ du point M par rapport à R'.
- 2) Déterminer la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ de R' par rapport à R.
- 3) Déduire les composantes de la vitesse du point M par rapport à R.
- 4) Déterminer l'accélération du point M par rapport à R'.
- 5) Déterminer l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ de R' par rapport à R.
- 6) Déterminer l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M.
- 7) Déduire les composantes de l'accélération du point M par rapport à R.

Exercice 2

Dans le plan vertical (XOY) d'un repère orthonormé supposé galiléen R(OXYZ) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où (OX) est la verticale ascendante, on considère une bille ponctuelle M de masse m susceptible de glisser sans frottement sur une piste circulaire de centre O et de rayon a.

A l'instant initial $t=0$, la bille M se trouvant au point A, se déplace avec une vitesse initiale quasi nulle V_0 vers le point B.

On donne $\dot{\theta} = \omega \neq \text{constante}$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ et on note $\vec{g}$: l'accélération de la pesanteur.



Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$.

- 1) Déterminer l'expression du
 - a- Vecteur position $\vec{OM}$ de la bille.
 - b- Vecteur vitesse instantanée $\vec{V}$ de la bille M par rapport au repère R.
 - c- Vecteur accélération instantanée $\vec{\gamma}$ de la bille M par rapport au repère R.
- 2) Représenter, sur un schéma clair, les forces appliquées à la bille M.
- 3) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la bille M dans le repère R.
- 4) Donner les projections de cette relation dans la base cylindrique et en déduire les équations différentielles du mouvement.
- 5)
 - a- En multipliant la projection sur $\vec{u}_\theta$ par $\dot{\theta}$, exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de g , a et $\cos \theta$.
 - b- Exprimer alors la réaction $\|\vec{R}\|$ de la piste sur la bille en fonction de m , g et $\cos \theta$.
- 6)
 - a- On suppose que la bille quitte la piste au point C. Pour quelle valeur θ_c de θ la bille quitte-t-elle la piste ?
 - b- Quelle sera alors sa vitesse v_c ? Décrire qualitativement le mouvement ultérieur de la bille M.
- 7) Donner l'expression du travail élémentaire de chacune des forces appliquées sur la bille M dans R.
- 8) Montrer que la résultante de toutes ces forces dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on déterminera. L'origine des énergies potentielles est prise pour $\theta=0$.
- 9)
 - a- Donner l'expression de l'énergie cinétique de la bille M dans R.
 - b- En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m de la bille M dans R.
 - c- Justifier la conservation de l'énergie mécanique E_m de la bille M.
 - d- Retrouver l'équation différentielle du mouvement de la bille M dans R.