

Exercice 1 : Pour chacun des énoncés suivants donner une réponse par vrai ou faux (on ne demande pas des justifications dans cet exercice)

1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{1}{x} + x$$

2) L'application g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = (|x| + 4)^2$, est injective.

3) L'application g précédente est surjective.

4) L'application h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = 2x + 3$, est injective.

5) L'application h précédente est surjective.

6) L'application h précédente est bijective.

7) Toute application à la fois injective et surjective est alors bijective.

8) Toute application bijective est à la fois injective et surjective.

9) La composée $\varphi \circ \psi$ de deux applications φ et ψ injectives est aussi injective.

10) La composée $\varphi \circ \psi$ de deux applications φ et ψ bijectives est aussi bijective.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et s la somme suivante $s = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1) Soit la somme $A = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$. Exprimer s en fonction de A .

2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Prouver par récurrence que $\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Prouver que $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.

4) a- Dédurre la somme A pour tout x de $\mathbb{R}$ tel que $e^{ix} \neq 1$.

b- Dédurre de 4) a) la somme s pour tout x de $\mathbb{R}$ tel que $e^{ix} \neq 1$.

5) Quels sont les x de $\mathbb{R}$ tels que $e^{ix} \neq 1$?