

Devoir de Contrôle N° 1 : Analyse

Section : BG1

Durée : 1h

N. de pages : 02

N.B: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

1) Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites déterminées par $U_0 = 1$, $V_0 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n + 2V_n \\ V_{n+1} = 2U_n + 3V_n \\ W_n = V_n - U_n \end{cases}$$

- a) Montrer que $(W_n)_n$ est une suite constante et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n = 1$.
 - b) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
 - c) En déduire les expressions de U_n et V_n pour $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Soit $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $U_0 = 0$ et $U_1 = 1$, ainsi que la relation de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.

Déterminer une expression de U_n en fonction de n .

Exercice 2

1) Déterminer une période positive de f lorsque :

a) $f(x) = \sin(6x) + \tan(3x)$,

b) $f(x) = \sin(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

2) On définit la fonction f par

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

a) Chercher D_f .

b) En tenant compte que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$, montrer que

$$\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[. \end{cases}$$

c) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$.

d) En déduire $f(x)$.

3) Calculer

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \text{ et } \arcsin\left(\sin\left(\frac{-9\pi}{4}\right)\right).$$

4) Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$

b) $\int \frac{2x}{x^2 + x + \frac{5}{4}} dx$

c) $\int \cos(\ln x) dx$.

Bon travail