

Devoir de Synthèse N° 1 : Analyse

Section : BG1

Durée : 2h

N. de pages : 02

N.B: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

1) Déterminer la limite des suites suivantes :

a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n$ c) $\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 7}\right)^n$ d) $\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)^n$.

2) Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$. Montrer que si

$$\begin{cases} (\ln n)^\alpha = o(n^\beta) \\ \text{et } n^\beta = o(a^n), \end{cases}$$

alors $(\ln n)^\alpha = o(a^n)$. En déduire que $n^3 + (\sqrt{3})^n + (\ln n)^3 \sim (\sqrt{3})^n$.

3) Déterminer les fonctions $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$g'(x) + \ln(2) g(x) + \sqrt{3} \int_0^2 g(t) dt = 0.$$

4) Résoudre $y'' = \frac{\ln 2}{3}$.

Problème

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la donnée de U_0 , $U_0 \in]0, 1[$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n - (U_n)^2.$$

Partie I

1) a) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$.

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c) En tenant compte que $U_{n+1} = f(U_n)$ tel que $f(x) = x - x^2$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n U_k^2$.

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = U_0 - U_{n+1}$.
- b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(1 - U_n) = \ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)$.
- b) Calculer $S'_n = \sum_{k=0}^n \ln(1 - U_k)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la nature de suite $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie II

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k U_k$.
- a) Montrer que les deux suites $(T_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- b) Déduire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite T et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{2n+1} \leq T \leq T_{2n}$.
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-U_{2n+1} \leq T - T_{2n} \leq 0$ et $0 \leq T - T_{2n+1} \leq U_{2n+1}$.
- b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|T - T_n| \leq U_{2n+1}$.

Bon travail