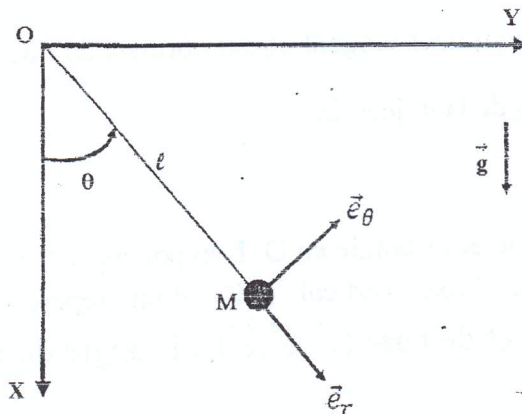


DEVOIR DE SYNTHESE N°1
(DUREE : 3h)

Exercice 1

On considère un pendule simple constitué d'une bille ponctuelle M de masse m , accrochée à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (XOY) d'un référentiel fixe R (O, X, Y, Z). On écarte le pendule d'un angle θ_0 de sa position d'équilibre verticale et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ considéré comme uniforme.



- 1) Exprimer les forces appliquées à la bille M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
- 2) Calculer $\vec{v}_{/R}(M)$ et $\vec{\gamma}_{/R}(M)$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération de M par rapport à R .
- 3) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille M dans le référentiel R .
- 4) Etablir l'équation différentielle du mouvement de la bille M dans le cas des faibles oscillations.

5) Résoudre cette équation différentielle.

6) Etablir l'expression de la tension T du fil.

Exercice 2

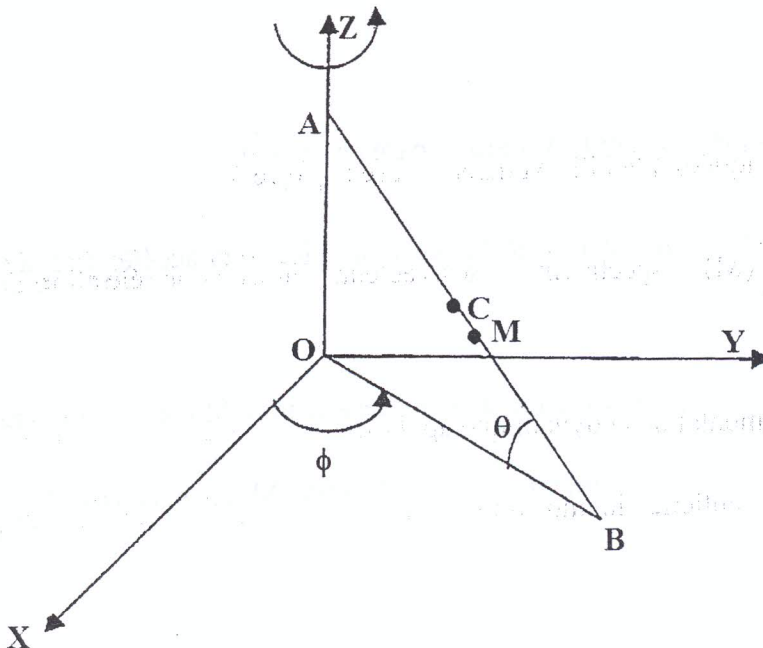
Soit un point mobile M dans un référentiel galiléen. Ses coordonnées cartésiennes rapportées à un système d'axe $R(O, X, Y, Z)$ sont, en fonction du temps :

$$\begin{cases} X = t \\ Y = 2t^2 - 1 \\ Z = 0 \end{cases}$$

- 1) Etablir l'équation de la trajectoire du point M . Tracer son allure.
- 2) Déterminer le vecteur vitesse du point M .
- 3) Montrer que l'accélération du point M est constante.
- 4) Quelle est la nature du mouvement de M ? Justifier.
- 5) Donner les expressions des composantes tangentielle et normale de l'accélération de M .
- 6) Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire.

Exercice 3

Soit un triangle (OAB) rigide et rectangle en O . L'hypoténuse AB a pour longueur $2a$. Le côté OA est confondu avec l'axe vertical (OZ) d'un repère orthonormé direct $R(O, X, Y, Z)$ supposé galiléen et de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'angle du triangle en B est constant et égal à θ .



Le triangle (OAB) tourne dans le sens positif autour de l'axe (OZ) suivant la loi :

$$\phi(t) = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OB}) = \omega t, \omega \text{ est une constante positive.}$$

Un point M oscille le long de AB de part et d'autre de son centre C. L'élongation de M, comptée positivement de C vers B, est donnée par $CM = a \sin(\omega t)$ où a est une constante positive. A $t=0$, la vitesse du point M est dirigée vers B.

On définit un repère orthonormé direct $R'(O, X', Y', Z')$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que l'axe (OX') est, à tout instant, confondu avec OB et l'axe (OZ') reste constamment parallèle à l'axe (OZ).

Tous les vecteurs doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ du repère R' .

I-1) Donner l'expression du vecteur rotation du repère relatif R' par rapport au repère absolu R.

I-2) Montrer que : $\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_z$

I-3) En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

II-1) Déterminer la vitesse $\vec{V}_r$ du point M par rapport à R' .

II-2) Déterminer la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ de R' par rapport à R.

II-3) Déduire les composantes de la vitesse du point M par rapport à R.

II-4) Retrouver, à partir d'une dérivation directe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, la vitesse du point M par rapport à R.

III-1) Déterminer l'accélération du point M par rapport à R' .

III-2) Déterminer l'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ de R' par rapport à R.

III-3) Déterminer l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M.

III-4) Déduire les composantes de l'accélération du point M par rapport à R.

III-5) Retrouver, à partir d'une dérivation directe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, l'accélération de M par rapport à R.