

Algèbre / D.C.N°2

Exercice 1 : Soit le polynôme P défini pour x de $\mathbb{R}$, par,

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$

- 1) Prouver que 1 est une racine de P d'ordre de multiplicité 2 (autrement dit que 1 est une racine double de P).
- 2) Dédire qu'il existe des réels a, b, c et d avec $a \neq 0$ tels que,

$$P(x) = (x - 1)^2 (ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad , \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

- 3) Déterminer ces réels a, b, c et d .

Exercice 2 : Soit le polynôme P précédent (de l'exercice 1) défini dans cet exercice pour x nombre complexe.

- 1) Prouver que 2 est une racine de P d'ordre de multiplicité 1 (autrement dit que 2 est une racine simple de P).
- 2) a) Vérifier que le nombre complexe i est une racine de P .
b) Dédire que $-i$ (qui est le conjugué de i) est aussi une racine de P .
- 3) En notant α l'ordre de multiplicité de i et sachant que l'ordre de multiplicité de $-i$ est aussi α (et qu'on sait déjà que 1 est racine double et que 2 est racine simple de P), déduire que $\alpha = 1$.
- 4) a) Dédire la factorisation de P pour tout x nombre complexe.
b) Dédire (de 4) a) la factorisation de P pour tout x nombre réel.