

Algèbre / E.S.N°2

Problème : Soit la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le déterminant $\det(A)$ de la matrice A .
2. Retrouver $\det(A)$ par une autre méthode (en cas d'utiliser par développement, on précise suivant quelle ligne ou colonne).
3. Retrouver $\det(A)$ par une 3^{ème} méthode.
4. Que signifie « A inversible dans $M_3(\mathbb{R})$ » ? (dans cette question 4. on ne demande pas de déterminer l'inverse de A).
5. Dédire de 1. que A est inversible (aussi dans cette question sans déterminer A^{-1}).
6. Déterminer la matrice inverse A^{-1} de A par la méthode des transformations élémentaires sur les lignes (dite aussi méthode de pivots de Gauss).
7. Soit a, b et c des éléments donnés de $\mathbb{R}$ et soit le système $(S_{a,b,c})$ donné par,

$$(S_{a,b,c}) : \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 3y + 4z = b \\ -4x + y + 8z = c \end{cases}$$

i) Déterminer la matrice produit $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

ii) En utilisant A^{-1} déduire les solutions x, y et z de $\mathbb{R}$ du système $(S_{a,b,c})$.

Exercice : Soit α, β et γ des éléments de $\mathbb{R}$ et soit la matrice $N = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$.

1. Prouver que, $\det(N) = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$
2. En déduire la condition sur α, β et γ pour que $\det(N) = 0$.