

Devoir de synthèse N° 2 : Analyse

Section : BG1

Durée : 2h

N. de pages : 02

N.B: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1.

1) Montrer qu'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{1+x^2}.$$

2) Déterminer les primitives sur $]0, +\infty[$ de

$$\frac{1}{x(x^2+1)} \text{ et } xe^x.$$

3) Soit (E) l'équation différentielle définie par :

$$(E) : x(1+x^2)y' - y = x^3e^x\sqrt{1+x^2}$$

où y est la fonction inconnue de la variable x et à valeurs réelles.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée à (E) .

b) Chercher une solution particulière de (E) et déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(1) = 0$.

Exercice 2.

Soit $f(x) = \int_1^x \ln(1+t)dt \forall x \in]-1, +\infty[$.

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x + 1 - 2\ln 2.$$

2) Montrer que f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

3) a) Calculer $f''(x)$, $\forall x \in] -1, +\infty[$.

b) Dédire un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f' .

c) Déduire un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f .

On donne :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Exercice 3.

On pose pour tout entier naturel n : $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) En utilisant un encadrement de $e^t(1-t)^n$ pour tout $t \in [0, 1]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$.

4) Montrer que $\forall n \geq 0, I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Bon travail