

Devoir de Contrôle N° 2 : Analyse

Section : BG1

Durée : 1h

N. de pages : 01

N.B: La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1

1) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)},$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \tan(2x),$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - xE\left(\frac{1}{x}\right) \right).$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\ln(2 - \cos x)}{x^2}$. Montrer que f admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$, noté $\tilde{f}$, que l'on précisera.

Exercice 2

1) Soient λ un réel non nul et f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Montrer que l'équation $1 - \frac{x}{2} + \cos x = 0$ possède une unique solution $x_0 \in [0, \pi]$.

3) En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[0, x]$ à la fonction $\tan$, montrer que

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 1 \leq \frac{\tan x}{x} \leq 1 + \tan^2 x.$$

Bon travail