

Institut Préparatoire aux Etudes

D'ingénieurs de Sfax.

Devoir de synthèse d'Analyse – Semestre N° 1 Section : P.B.1

Drée : 2h

Date : 30 janvier 2021

Nbre de page : 2

Exercice :

Soient a et b deux réels tels que $0 < b < a$. On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

définies par :
$$\begin{cases} a_0 = a \text{ et } b_0 = b. \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(a_n - b_n)^2}{a_n + b_n}$

3) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$ on a

$$x \leq \frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2} \leq y.$$

4) Dédire que la suite $(a_n)_n$ est décroissante et que $(b_n)_n$ est croissante.

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |a_n - b_n|$.

6) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|a_n - b_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - b|$.

7) Dédire que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.

Problème.

Partie 1 :

On pose $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

1°) Montrer que $\sqrt{1+x^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

2°) Dédire le domaine de définition de f .

3°) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Partie 2 :

On pose $F_n(x) = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1°) Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$.

2°) A l'aide d'une primitivation par partie, montrer que :

$$F_n(x) = x^{n-1}\sqrt{1+x^2} - (n-1) \int x^{n-2}\sqrt{1+x^2} dx.$$

3°) a / Vérifier que $\forall n \geq 2 ; \forall x > 0$ on a :

$$F_n(x) + F_{n-2}(x) = \int x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx.$$

b / Dédire que :

$$n F_n(x) = x^{n-1}\sqrt{1+x^2} - (n-1)F_{n-2}(x).$$

c / Calculer $F_3(x)$.