

Math. / Algèbre

[D.C.]

N.B.S.V.P. : il est préférable que pour chaque question la réponse définitive soit soulignée (ou encadrée).

Exercice 1 : Soit le déterminant $\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

- 1) Déterminer ce déterminant α .
- 2) Retrouver ce déterminant α par une autre méthode.

Exercice 2 : Soit la matrice A de $M_2(\mathbb{R})$ suivante,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

- 1) a) Vérifier que $A^2 = O_2$ (où $A^2 = A A$ et $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).

[Rappel du produit : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}$].

- b) Dédire alors que , $A^3 = O_2$, $A^4 = O_2$, $A^5 = O_2$, , etc

[Rappel : $A^3 = A A^2$, $A^4 = A A^3$, $A^5 = A A^4$, , $A^{k+1} = A A^k$].

- 2) Dédire la matrice $(I_2 + A)^n$, pour tout entier $n \geq 2$ (où $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

[Indication : on sait que $(M + N)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p M^{n-p} N^p$, pour toutes matrices M et N de $M_2(\mathbb{R})$

telles que $MN = NM$, où $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, on sait aussi que $N^0 = I_2$ et que $I_2 B = B$ et $B I_2 = B$

pour toute matrice B de $M_2(\mathbb{R})$].

Bonne chance