

Math / Algèbre

(E.F.S. N°2)

Exercice 1 : Soit $\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ muni de la structure de $\mathbb{R}$ -e.v. usuelle (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ où par définition, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ et $\lambda (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, pour tout λ de $\mathbb{R}$).

1) a) Soit deux vecteurs u_1 et u_2 de cet espace $\mathbb{R}^2$. Que signifie que (u_1, u_2) est *générateur* (dite aussi famille génératrice ou encore la partie $\{u_1, u_2\}$ est génératrice) de cet espace $\mathbb{R}^2$?

b) Que signifie que (u_1, u_2) est *libre* ?

2) Que signifie que (u_1, u_2) est une *base* de cet espace $\mathbb{R}^2$?

3) Soit les deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants, $v_1 = (3, 1)$ et $v_2 = (2, 0)$.

Prouver que (v_1, v_2) est *libre*.

4) Prouver que (v_1, v_2) est *générateur* (dite aussi famille génératrice) de cet espace $\mathbb{R}^2$.

5) Prouver que (v_1, v_2) est une *base* de cet espace $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées dans cette base de tout vecteur $u = (a, b)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit le polynôme f défini pour la variable x ($x \in K$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) par,

$$f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$$

1) Soit $K = \mathbb{R}$. Justifier que 1 est une racine de f .

2) Dédire qu'il existe des éléments a, b, c et d de $\mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ tels que,

$$f(x) = (x - 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d), \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$

3) Déterminer a, b, c et d et en déduire que $f(x) = (x - 1)(x^3 - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

4) i) Prouver que 1 est une *racine simple* du polynôme g défini par $g(x) = x^3 - 1$ pour $x \in \mathbb{C}$.

ii) Sachant que $e^{i2\pi/3}$ et son conjugué sont aussi des racines de g déduire la factorisation de $g(x)$ pour x dans $\mathbb{C}$ et alors la factorisation de $g(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$.

5) Donner la factorisation de $f(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$.