

Mathématiques / Algèbre

E.F.S-N°1

Exercice 1 : Soit la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminer par la méthode de pivots de Gauss (la méthode des transformations élémentaires) la matrice inverse P^{-1} de P .

Exercice 2 : Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1) Déterminer la matrice A^2 (où $A^2 = A A$, le produit de A avec A).

(Rappel du produit : le coefficient $c_{i,j}$ de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne d'une matrice produit $M N$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice M avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice N)

2) Dédire que $A^3 = 0_3$ (où $A^3 = A A^2$, le produit de A avec A^2 et où $0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$).

3) Dédire la matrice A^4 (où $A^4 = A A^3$, le produit de A avec A^3).

4) Dédire que plus généralement, $A^k = 0_3$ pour tout entier naturel k tel que $k \geq 3$.

5) Déterminer la matrice $2I_3 + A$ (où $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$).

6) Déterminer la matrice $(2I_3 + A)^2$.

7) Prouver que pour tout entier naturel m dans $\mathbb{N}$,

$$(2I_3 + A)^m = 2^m I_3 + m 2^{m-1} A + C_m^2 2^{m-2} A^2$$

(Indication : Vous pouvez la prouver en raisonnant par récurrence ou en utilisant le binôme de Newton

concernant les matrices. On rappelle que $C_m^2 = \frac{m!}{2!(m-2)!}$ si $m \geq 2$ et $C_m^2 = 0$ si $m < 2$ et que pour

toute matrice M dans $M_3(\mathbb{R})$, $M^0 = I_3$, $I_3 M = M I_3 = M$ et $(I_3)^k = I_3$ pour tout entier k dans $\mathbb{N}$)

8) Déduire alors la matrice $(2 I_3 + A)^m$ pour tout entier m dans $\mathbb{N}$.

9) Soit pour tout entier n dans $\mathbb{N}$ des réels u_n , v_n et w_n définis en n par,

$$u_0 = 1, v_0 = -1 \text{ et } w_0 = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$$

et on pose $X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$. Vérifier qu'on a,

$$X_{n+1} = B X_n \quad \text{où} \quad B = 2 I_3 + A$$

10) Déduire que $X_n = B^n X_0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

11) Déduire les réels u_n , v_n et w_n en fonction de l'entier n .

Bonne Chance