

Matière:Analyse .

Section : PB 1

A.U : 2021/2022

Devoir de synthèse du 1^{ère} Semestre Durée : 2^hExercice N° 1 :

1°) Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1+2t}{(1+t+t^2)^2} dt ;$$

$$\int \frac{t+2}{t+1} dt ;$$

$$\int t^3 \ln(t) dt .$$

2°) Déterminer les réels a et b tel que :

$$a) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\} ; \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} .$$

$$b) \text{ Déduire } \int \frac{1}{x^2-1} dx .$$

Exercice N° 2 :

1°) Caculer les limites des suites suivantes.

$$a) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^n ;$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ;$$

$$c) \ln\left(\frac{n^2+2+\sin(n)}{n^2}\right).$$

2°) Montrer que : $n^3 + (\ln(n))^3 = o\left((\sqrt{3})^n\right)$.En déduire que : $n^3 + (\sqrt{3})^n + (\ln(n))^3 \sim (\sqrt{3})^n$.3°) a) Déterminer les fonctions $g: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que:

$$g'(x) + \ln(2)g(x) + \sqrt{3} \int_0^2 g(t) dt = 0.$$

$$b) \text{ Résoudre: } Y'' = \frac{\ln(2)}{3}.$$

Exercice N° 3 :

Soient deux suites $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ définies par: $U_0 = 2$ et $V_0 = 10$.

$$U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1°) Montrer que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ de terme général $W_n = V_n - U_n$; $n \in \mathbb{N}$; est une suite géométrique de raison q que l'on déterminera.

2°) Exprimer W_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n)$

3°) Dédire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leq V_n$.

4°) Montrer que la suite :

$(U_n)_{n \geq 0}$ est croissante et que la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ est décroissante .

5°) Dédire que les suites $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes.

6°) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par $S_n = 3U_n + 4V_n$ est constante.

7°) Dédire alors la limite commune des suites $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$.

8°) Dédire un équivalent simple des suites de terme général :

$$A_n = \ln(1 + W_n) \quad ; \quad B_n = 1 - \cos((-1)^n W_n).$$