

Math. / Algèbre / D.C.N°1

N.B.S.V.P. : il est préférable que pour chaque question la réponse définitive est soulignée (ou encadrée).

Exercice 1 : Soit n un entier naturel avec $n \geq 1$.

1) Soit la somme $\sum_{k=0}^n Z^k$ (égale à $1 + Z + Z^2 + \dots + Z^n$) pour Z nombre complexe .

a) Déterminer cette somme pour en particulier $Z = 1$.

b) Prouver que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n Z^k = \frac{1 - Z^{n+1}}{1 - Z}$ pour $Z \neq 1$

2) Soit θ un réel. Prouver que, $1 - e^{i\theta} = -2i \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}$

(Indication : $1 = e^{i0}$).

3) Soit x un réel. Donner la partie réelle et aussi la partie imaginaire de e^{ikx} pour $k \in \mathbb{N}$.

4) a) Déduire la somme $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

(Indication : en utilisant 3) , 1) et 2)).

b) Donner $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

Exercice 2 : Soit x un réel.

1) Prouver l'égalité , $(\cos x)^4 = \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$

(Indication : $\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$ et $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ pour

tous a et b nombres complexes).

2) Retrouver cette égalité en utilisant $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$.

Bonne Chance