



Algèbre / E.F.S.N°1

Exercice 1 :

- 1) Soit l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 6x + 1$, pour tout élément x de $\mathbb{R}$.
 - a) Justifier que f est injective.
 - b) Justifier que f est surjective. Dédurre que f est bijective et donner sa bijection réciproque.
- 2) Soit l'application g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2$, pour tout élément x de $\mathbb{R}$.
 - a) Déterminer $g([0, 3])$ et aussi $g([-4, 0])$.
 - b) Dédurre $g([-4, 3])$.
- 3) Déterminer $g([-4, 3] \cap [0, 5])$ et $g([-4, 3]) \cap g([0, 5])$. Comparer alors ces deux ensembles $g([-4, 3] \cap [0, 5])$ et $g([-4, 3]) \cap g([0, 5])$ ($\therefore$ sont-ils égaux ou non).

Exercice 2 :

- 1) Déterminer par transformations élémentaires (dites aussi opérations élémentaires) les solutions du système (S_1) suivant,

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y - 2z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \quad \text{où } x, y \text{ et } z \text{ sont dans } \mathbb{R}$$

- 2) Même question pour le système (S_2) suivant,

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases} \quad \text{où } x, y \text{ et } z \text{ sont dans } \mathbb{R}$$

Exercice 3 :

- 1) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ où α et β sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Déterminer A^2 (où A^2 est la matrice produit de A par A).

2) Prouver en raisonnant par récurrence que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $A^p = \begin{bmatrix} \alpha^p & 0 \\ 0 & \beta^p \end{bmatrix}$.

(où A^1 est A et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $A^{k+1} = A A^k$, c'est-à-dire que A^{k+1} est la matrice produit de A par A^k , en particulier $A^2 = A A$ et $A^3 = A A^2$).

3) Soit la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer les deux matrices B^2 et B^3 (où $B^2 = B B$ et $B^3 = B B^2$).

4) Prouver alors que $B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (où $B^4 = B B^3$).

5) Dédurre les deux matrices B^{2024} et B^{2025} .

(Indication : $B^{m+n} = B^m B^n$ et $B^{m \cdot n} = (B^m)^n$ pour tout m et n dans $\mathbb{N}$).

Bonne chance